Über die Dämpfung langsamer Biegungs- und Drillungsschwingungen von Steinsalzprismen.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

GEORG-AUGUST-UNIVERSITAT ZU GÖTTINGEN

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VORGELEGT VON

FRITZ SCHMIDT
AUS HAMBURG.

Göttingen.
1912.

Tag der mündlichen Prüfung: 8. November 1911.
Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Voigt.

Verlag von R. Trenkel in Berlin.

Dem Andenken meines Vaters.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548107_0135

Einleitung.

Die Aufgabe der Untersuchung war die Beobachtung der Dämpfung langsamer gleichförmiger Biegungs- und Drillungsschwingungen bei Steinsalzstäben. Einmal sollte festgestellt werden, wie die Dämpfung verläuft, zum zweiten sollten aus dem Verlauf womöglich Materialkonstanten gewonnen werden.

Die Dämpfung der Schwingungen elastischer Körper kann in verschiedener Weise stattfinden. Wie sie bei einer bestimmten Substanz erfolgt, kann nur die Beobachtung lehren. Cantone[1]) schließt aus einer Reihe von Beobachtungen an Drähten verschiedener Metalle, daß die Abnahme der Schwingungsamplitude elastischer Drähte kein dynamisches Phänomen, sondern eine Folge derselben Ursache ist, welche die Erscheinung der elastischen Hysteresis bewirkt. Damit würde also die innere Reibung als statische Reibung gekennzeichnet, entsprechend der, die ein schwingendes Pendel an einer festen Unterlage erfährt. Da es sich im folgenden um Schwingungen sehr kleiner Amplituden handelt, bei denen die Beanspruchung der Stäbe merklich innerhalb der Elastizitätsgrenze liegt, so erscheint es wahrscheinlich, daß wir uns hier auf dynamische Reibung beschränken können, die nur so lange wirkt, wie die Bewegung des Körpers anhält, entsprechend dem Luftwiderstand beim schwingenden Pendel, der nur wirksam ist, solange die Schwingung andauert.

Für diese dynamische Reibung finden sich in der Literatur zwei theoretische Ansätze. Der ältere stammt von L. Boltz-

---

[1]) Cantone, Sull' attrito interno del nichel. Atti d. Reale Accad. d. Linc. Roma, Rendiconti. Bd. 3, 1894. Sull' attrito interno dei metalli. Il Nuovo Cimento. Serie IV, Bd. 1.

mann[1]). Die Ursache der Dämpfung der Schwingungen ist ihm die elastische Nachwirkung. Er geht von der Vorstellung aus, daß die Kräfte, die bei einer elastischen Deformation wirksam sind, nicht nur von dieser selbst, sondern auch von den vorangegangenen Deformationen des Körpers abhängen. Eine Dehnung erfordert weniger Kraft, wenn ihr eine Dehnung in gleichem Sinne vor kürzerer oder längerer Zeit vorangegangen ist. Die Kraftverminderung ist um so größer, je kürzer die Zeit zwischen den beiden Dehnungen ist. Er erhält so für die Kraft einen Ansatz von folgender Form:

$$(1) \qquad N = \mu \cdot \Theta(t) - \int_0^\infty \Theta(t-\omega) \cdot \varphi(\omega) \cdot d\omega$$

Darin bezeichnet N die wirkende Kraft, $\Theta(t)$ die zur Zeit t vorhandene Deformation, μ ist eine Materialkonstante. Die Funktion $\varphi(t)$ gibt an, in welcher Weise die kräftevermindernde Eigenschaft vorangegangener Deformationen von der Zeit abhängt. Diesen Ansatz für N setzt er in die Bewegungsgleichung des durch ein Gewicht gespannten, tordierten und dann sich selbst überlassenen Drahtes ein. Er erhält so für das logarithmische Dekrement Λ der gedämpften Schwingung eine von der Schwingungsdauer des Stabes unabhängige Größe. Maxwell[2]) hat darauf hingewiesen, daß sich der Boltzmannsche Ansatz auch in Form einer Reihe darstellen läßt, die nach den Differentialquotienten der Verrückung nach der Zeit fortschreitet:

$$(2) \quad N = \mu \cdot \Theta(t) - \Theta(t)\int_0^\infty \varphi(\omega)\,d\omega + \frac{\partial\,\Theta(t)}{\partial t}\int_0^\infty \omega\,\varphi(\omega)\,d\omega - \ldots$$

$$= (\mu - A)\,\Theta(t) + B\frac{\partial\,\Theta(t)}{\partial t} - C\frac{\partial^2\,\Theta(t)}{\partial t^2} + \ldots$$

Er macht darauf aufmerksam, daß die Berücksichtigung jedes weiteren Gliedes der Reihe ein weiteres Zurückgehen auf die Vorgeschichte des Körpers bezeichnet.

---

[1]) L. Boltzmann, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Berichte der Wiener Akad. Bd. 70. (Annalen der Physik u. Chemie, Ergänzungsband 7, 1876.)

[2]) C. Maxwell, On Constitution of Bodies. Scientific Papers Bd. II.

Demgegenüber ist Herr Voigt[1]) in seinen theoretischen Arbeiten über innere Reibung von einer etwas anderen Vorstellung ausgegangen. In Verallgemeinerung des in der Hydrodynamik üblichen Ansatzes für die innere Reibung bei Flüssigkeiten nimmt er an, daß die Druckkomponenten Funktionen der Deformationen und der Deformationsgeschwindigkeiten sind. Während Boltzmann nur isotrope Körper behandelt, ist der Ansatz hier gleich so allgemein formuliert, daß er von vornherein die Kristalle mit umfaßt. Dabei wird die theoretische Betrachtung auf so kleine Schwingungen beschränkt, daß es ausreicht, die Druckkomponenten als lineare Funktionen der Deformationsgeschwindigkeiten anzusetzen, also:

$$(3)\quad \begin{aligned} X_x = {} & c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\ & - (b_{11}x'_x + b_{12}y'_y + b_{13}z'_z + b_{14}y'_z + b_{15}z'_x + b_{16}x'_y) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet der beigefügte Strich $\left(x'_x = \frac{\partial x_x}{\partial t}\right)$ den Differentialquotienten nach der Zeit. (In gewisser Weise ist damit eine erste Annäherung für die Maxwellsche Reihe genommen.) Mit Hilfe dieser Ansätze wird dann die gleichförmige Biegung und Drillung eines kristallinischen Zylinders behandelt, bei dem die gleichförmige Spannung durch Einwirkungen auf die Grundflächen erzielt wird, während die Mantelflächen frei bleiben. Die Durchführung der Rechnung ergibt, daß das logarithmische Dekrement Λ indirekt proportional mit der Schwingungszeit ist, und zwar gleichmäßig bei der Biegung wie bei der Drillung. Die Konstante $d = \Lambda \cdot T$ erweist sich als Quotient $\frac{r}{s}$ des Moduls der inneren Reibung durch den Elastizitätsmodul, wobei die Reibungsmoduln r_{hk} aus den Reibungskonstanten b_{hk} ähnlich gebildet werden wie die Elastizitätsmoduln s_{hk} aus den Elastizitätskonstanten c_{hk}. Es ist gleich an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß damit noch nicht der allgemeinste Ansatz ge-

[1]) W. Voigt, Über die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Metalle. Abhandl. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen 1890, Bd. 36. (Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, S. 395 ff.)

wonnen ist. Auf dessen Form wird weiter unten eingegangen werden.

Eine Reihe experimenteller Untersuchungen beschäftigte sich mit der Dämpfung von Torsionsschwingungen bei Drähten[1]). Zur Bestimmung von Materialkonstanten für die innere Reibung haben diese Arbeiten nicht geführt. Die ersten umfangreichen Arbeiten zu diesem Zwecke sind von Herrn Voigt[2]) an Metallen durchgeführt im Anschluß an die eben genannte theoretische Arbeit. Die gleichen Apparate sind für die vorliegende Arbeit benutzt und werden weiter unten beschrieben werden.

Zunächst wurde die größte Sorgfalt darauf verwendet, wohl definiertes isotropes (oder wohl besser quasi-isotropes) Material zu erhalten. Möglichst reines Material wurde in Blöcke gegossen und aus diesen wurden sorgfältig die zu untersuchenden Stäbchen ausgeschnitten. Die Untersuchung ergab, daß sich unter den untersuchten Metallen ganz verschiedene Typen fanden. Kadmium verhält sich genau wie es die Boltzmannsche Theorie verlangt, Kupfer und Nickel bilden recht gute Beispiele für den von Herrn Voigt aufgestellten einfachsten Ansatz für die innere Reibung. Bronze verhält sich bei der Biegung genau wie das Kupfer, die Dämpfung der Drillungsschwingungen aber läßt sich deuten als Superposition der Wirkung der elastischen Nachwirkung und der inneren Reibung. Dagegen zeigt z. B. Gußstahl bei der Drillung logarithmische Dekremente, die mit wachsender Schwingungszeit wachsen, sich also weder durch den einen noch durch den andern Ansatz darstellen lassen. Die Beobachtungen zeigten also eine viel größere Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, als sich nach den vorbereitenden theoretischen Ansätzen erwarten ließ.

---

[1]) Z. B. H. Streintz, Sitzungsber. d. Wiener Akad., Bd. 69, 1874; P. Schmidt, Ann. d. Phys. u. Chemie, Bd. 2, 1877; J. Klemenčič, Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Bd. 78, 1878; Bd. 81, 1880; Z. Carrière u. H. Bouasse, Ann. de chimie et de physique, S. 14, Bd. 2, 1904; S. 8, Bd. 14, 1908.

[2]) W. Voigt, Bestimmung der Konstanten d. Elastizität u. Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle. Abhandlgn. der Kgl. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen 1892, Bd. 38. (Innere Reibung fester Körper, insbes. d. Metalle. Ann. d. Phys. u. Chemie, Bd. 47, 1892.)

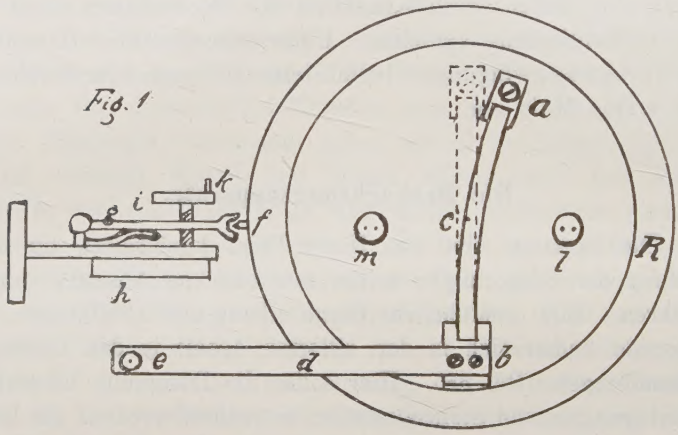
Bemerkenswert ist dabei die Feststellung, daß die Dämpfung vollständig unabhängig von der Duktilität des Materials ist. Das äußerst duktile Kupfer zeigt eine recht kleine Dämpfung, es wird darin nur übertroffen vom Messing, bei der Drillung auch von der Bronze. Dagegen zeigt Gußeisen eine etwa dreißigmal so starke Dämpfung. Die höchste überhaupt beobachtete Dämpfung findet sich beim Kadmium.

Beobachtungen über innere Reibung bei Kristallen sind bisher nicht veröffentlicht. Für die Biegung sind nach der unten beschriebenen Methode bereits gleichzeitig mit den obigen Untersuchungen orientierende Messungen von Herrn Voigt durchgeführt. Spätere eingehendere Untersuchungen von Fräulein Trolle sind leider durch Krankheit der Beobachterin nicht bis zur Veröffentlichung gediehen. Untersuchungen über Dämpfung von Torsionsschwingungen beim Steinsalz liegen hier überhaupt zum ersten Male vor.

Die Beobachtungsapparate.

Die Apparate sind von Herrn Voigt konstruiert, um eine Prüfung der Folgerungen seines theoretischen Ansatzes durchzuführen. Eine ausführliche Beschreibung und Abbildungen der Apparate finden sich in der zitierten Arbeit in den Göttinger Abhandlungen (Bd. 38). Hier sollte die Dämpfung langsamer Schwingungen von Steinsalzstäben betrachtet werden. Als langsame Schwingungen gelten dabei solche, deren Schwingungszeit groß ist gegen die Fortpflanzungszeit einer Deformation über den ganzen Stab. Die Deformation des Stabes ist dann in jedem Augenblick nahe dieselbe, als würden die Stabenden in der augenblicklichen Lage dauernd festgehalten. Um solche langsamen Schwingungen zu erzielen, wird der Stab an einem seiner Enden befestigt, am andern mit einer trägen Masse verbunden, die gleichzeitig mit ihm schwingt. Die Einrichtung ist so getroffen, daß als jene Masse bewegende Kräfte nur die im Innern des Stabes erregten elastischen Kräfte wirksam sind. Die Anordnung ist im übrigen so getroffen, daß die Stäbe stets gleichförmiger Biegung und Drillung unterworfen werden.

Um den Stab in gleichförmige langsame Biegungsschwingungen zu versetzen, ist er mit seinem oberen Ende an einer schweren Kreisscheibe aus Messing befestigt, die sich in indifferentem Gleichgewicht befindet und um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist. Das untere Ende des Stabes wird festgehalten, und zwar so, daß sich der Mittelpunkt des Stäbchens genau vor dem Drehungsmittelpunkt der Scheibe befindet. Wird die Scheibe nun aus ihrer Ruhelage gebracht, so wird das Stäbchen nach einem Kreisbogen verbogen. Überläßt man das System jetzt sich selbst, so führt das Stäbchen gleichförmige Biegungsschwingungen aus.



Die Kreisscheibe aus Messing (Fig. 1) trägt am äußeren Rande einen kräftigen Verstärkungsring R, um das Trägheitsmoment möglichst groß zu machen. Sie ruht mit einer Karneolschneide auf einer Karneolplatte. Die Schneide, die senkrecht zur Zeichenebene liegt, fällt in der Zeichnung mit dem Mittelpunkt c der Scheibe zusammen. Um unnötige Abnutzung der Schneide zu verhindern, läßt sich die Scheibe mit der Schneide durch eine besondere Vorrichtung in der Ruhelage von der Platte abheben, so daß dann keinerlei Beanspruchung der Schneide stattfindet. Der zu untersuchende Stab wird in eine massive Messingfassung a gekittet. Die Scheibe hat oberhalb

der Schneide einen geraden Schlitz. In diesem gleitet ein Messingstück, das in beliebiger Höhe über der Schneide durch eine Schraube festgestellt werden kann. Mit seiner oberen Fassung wird der Stab fest an dieses Messingstück geschraubt. Die Höhe des Messingstücks wird so reguliert, daß sich der untere Rand der Fassung genau um die halbe Stablänge über dem Drehungsmittelpunkt befindet. Unter der Schneide befindet sich in der Scheibe ein zweiter Schlitz, in dem ein Gegengewicht bewegt werden kann, um das Gewicht des oberen Messingstücks kompensieren und die Scheibe in indifferentes Gleichgewicht bringen zu können. Mit dem unteren Ende ist der Stab gleichfalls in eine massive Messingfassung *b* eingekittet. An diese ist ein Messingbügel *d* geschraubt, der am andern Ende zwei Spitzen *e* trägt. Diese Spitzen werden zwischen zwei Kupferbacken eingeklemmt. Dadurch hat das untere Ende des Stabes die Möglichkeit, sich etwas um diese Spitze zu drehen, ist also imstande, sich bei der Bewegung etwas zu heben und zu senken. Das ist nötig, um Längsspannungen im Stabe und damit wechselnde Drucke auf die Karneolschneide zu hindern, die die eigentlich zu beobachtende Erscheinung stören würden. Dagegen ist die Fassung durch den Bügel an einer seitlichen Bewegung oder einer Drehung gehindert. Die Scheibe trägt am Rande einen kleinen Zapfen *f*, der in den Einschnitt eines Hebels *g* paßt, mit dessen Hilfe die Scheibe die gewünschte Drehung erhält. Ist der Stab an der Scheibe befestigt, so wird der Hebel *g*, der auf einem Schlitten *h* ruht, an die Scheibe herangeschoben. Durch die Schraube *i* läßt sich dann der Stift *f* heben bzw. senken und damit der Stab biegen. Zieht man dann den Schlitten zurück, so wird das System frei und führt die gewünschten Schwingungen aus. Die Versuche werden im Dunkeln ausgeführt. Es ist deshalb notwendig, die Größe der Drehung der Schraube *i* nach dem Gefühl beurteilen zu können. Dazu dient ein kleiner Stift *k* auf dem Rande des Schraubenkopfes. Auf der Rückseite trägt die Scheibe senkrecht zu ihrer Ebene bei *l* einen Hohlspiegel, dessen Gewicht durch ein verstellbares Gegengewicht bei *m* kompensiert wird.

Fällt der Schwerpunkt des schwingenden Systems in die Drehungsachse, so ist die Elastizität des Stäbchens die einzige beschleunigende Kraft. Außer der inneren Reibung wirken verzögernd noch der Luftwiderstand und die Achsenreibung. Beide sind durch besondere Messungen festzustellen.

Das Prinzip des Apparates zur Erregung langsamer, gleichförmiger Drillungsschwingungen ist genau das gleiche wie beim Biegungsapparat. Die träge Masse wird durch eine schwere Messingscheibe gebildet, in die der Stab mit seinem

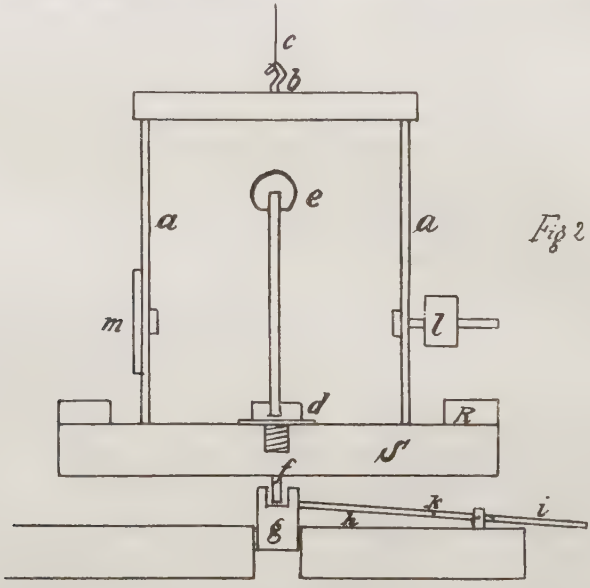


Fig 2

untern Ende eingeschraubt ist. Wird das obere Ende des Stabes festgehalten, die Scheibe gedreht und dann sich selbst überlassen, so führen Stab und Scheibe gemeinsam Drillungsschwingungen aus.

Die Scheibe S (Fig. 2), die hier im Durchschnitt gezeichnet ist, trägt einen Messingbügel a, an dem bei b eine Aufhängevorrichtung angebracht ist. Mit dieser hängt das System an einem dünnen Messingdraht, der an seinem obern Ende mit einem starken Tragegerüst von Messing verbunden ist. Dieses Gerüst ruht auf drei Stellschrauben. Die Mittellinie der Scheibe fällt

genau in die Verlängerung des Drahtes. Nur dann kann bekanntlich eine reine Torsionsschwingung der Scheibe stattfinden. Mit seinem unteren Ende wird der Stab in eine massive Messingfassung *d* eingekittet, die dann fest in die Scheibe *S* eingeschraubt wird. Das obere Ende des Stabes sitzt in einer Kugelfassung *e*, an die am untern Ende eine Ebene angefeilt ist. Ist der Stab eingeschraubt, so wird die obere Fassung zwischen zwei Kupferbacken festgeklemmt, die vorher je nach der Länge des Stäbchens in die richtige Höhe gebracht sind, und die fest an das Aufhängegestell geschraubt sind. Infolge der Kugelform der Fassung *e* läßt sich dieses Festklemmen ausführen, ohne daß dadurch das untere Ende des Stäbchens und die Scheibe ihre Lage ändern, so daß auch dann noch der Aufhängedraht in die Drehungsachse des Systems fällt. Jetzt ist das obere Ende des Stäbchens fest mit dem Gerüst verbunden, kann sich also überhaupt nicht bewegen, das untere kann den Bewegungen der Scheibe folgen. Das Gewicht der Scheibe wird dabei von dem Draht getragen, der Stab wird wesentlich nur durch das Trägheitsmoment der Scheibe beansprucht. Wird die Scheibe um ihre Mittellinie gedreht und dann losgelassen, so führt sie Torsionsschwingungen aus. Die beschleunigende Kraft wird dabei teils durch den Stab, teils durch den Draht geliefert. Doch ist dieser zweite Anteil bei der Länge des Drahtes und bei dem geringen Ausschlagswinkel, um den tordiert wird, so gering gegen den Anteil, den das Stäbchen liefert, daß er vernachlässigt werden kann. Sind Apparat und Stäbchen von vornherein richtig zentriert und gelingt es, die Scheibe wirklich um ihre Mittellinie zu drehen, so führt der Stab langsame gleichförmige Drillungsschwingungen aus. Gedämpft wird die Bewegung teils durch die innere Reibung des Stabes, teils durch den Luftwiderstand. Letzterer muß durch besondere Messungen ermittelt werden. Um der Scheibe die gewünschte Drehung zu erteilen, ist eine besondere Vorrichtung unter dem Mittelpunkt der Scheibe angebracht. Die Scheibe trägt am untern Ende eine kleine Platte *f*, die genau in einen Schlitz eines Zylinders *g* paßt. Dieser Zylinder steckt in einer Öffnung des Aufhängegestells.

Er kann in dieser auf- und abwärts geschoben und um die vertikale Achse gedreht werden. Beides geschieht mit Hilfe des Hebels *h*. Dieser tritt mit seinem Griff *i* unter der Scheibe hervor und gestattet so ein einfaches Senken und Heben des Zylinders. Die Bewegung um die vertikale Achse geschieht ähnlich wie beim Biegungsapparat durch Schraube und Feder, die am Hebel etwa bei *k* angreifen. Ist das Stäbchen eingeschraubt und die obere Fassung *e* befestigt, so wird der Zylinder *g* mittels des Griffes gehoben, also über die Platte *f* geschoben. Dann wird der Zylinder mit Hilfe der Schraube bei *k* gedreht. Dadurch wird der Stab gedrillt. Befreit man jetzt die Platte *f* durch Heben des Griffes aus dem Einschnitt des Zylinders, so führen Stab und Scheibe die gewünschte Drillungsschwingung aus. Ist die Zentrierung des Stäbchens wirklich richtig durchgeführt, so gelingt es in der Regel stets, durch ruhiges Heben des Griffes reine Drillungsschwingungen zu erzielen. Die Schwierigkeit liegt vor allem in der Herstellung einer guten Zentrierung. Davon wird später noch einmal die Rede sein.

Das Beobachtungsmaterial.

Der Beobachtung unterworfen wurden prismatische Stäbe von Staßfurter Steinsalz in verschiedenen Orientierungen. Die Länge der Stäbchen schwankte etwa zwischen 6 und 12 cm, die Breite zwischen 0,48 und 0,62 cm, die Dicke zwischen 0,15 und 0,16 cm. Die Stäbe waren von Dr. Steeg u. Reuter in Homburg v. d. Höhe geschnitten. Leider zerbrach ich bei den Untersuchungen so viele Stäbe, daß ich mit dem bereits vor Jahren für Herrn Voigt hergestellten und mir freundlichst zur Benutzung überlassenen Material nicht ausreichte, sondern zweimal Nachbestellungen machen mußte. Das erwies sich schließlich recht störend dadurch, daß auch dort, wo die Beobachtungen an Stäben gleicher Herkunft recht gut untereinander stimmten, die Resultate für Stäbe verschiedener Herkunft öfter beträchtlich voneinander abwichen. Im einzelnen wird noch bei den Beobachtungsresultaten darauf hinzuweisen sein.

Die verschiedene Lage der Stäbchen im Kristall übersieht

man am schnellsten und einfachsten, wenn man sich die Durchstoßfiguren der Stäbe auf einer Kugel um eine Würfelecke vergegenwärtigt (Fig. 3). Die Figur zeigt einen Oktanten der Kugel, dessen Ecken durch die kristallographischen Hauptachsen gebildet werden. Die Stäbe sind in ihrer natürlichen Lage im Kristall gezeichnet, so daß je der Mittelpunkt ihrer Grundfläche mit der Würfelecke bzw. mit dem Kugelzentrum zusammenfällt. *AB*, *BC*, *CA* seien die Schnittlinien der Würfelebenen mit der Kugeloberfläche, *AD* die einer Granatoederfläche. Dann liegen die sechs untersuchten Sorten, die im

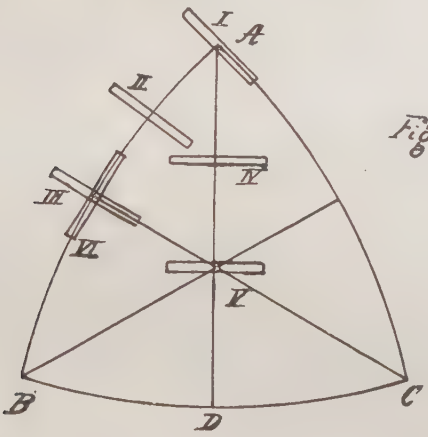


Fig. 3

folgenden einfach mit I bis VI bezeichnet werden sollen, in der durch die Zeichnung angegebenen Weise. Bei I fallen sämtliche Flächen des Prismas in Würfelebenen; die Längsachse wie Breite und Dicke (wie ich fortan kürzer statt Richtung der größeren und kleineren Querschnittsausdehnung sagen werde) fallen in vierzählige kristallographische Hauptachsen. II hat die Längsrichtung in der Würfelebene unter $22^1/_2{}^0$ gegen die Achse. Die Dicke liegt in der Würfelebene, die Breite senkrecht dazu. Für III gilt das gleiche mit dem einen Unterschiede, daß die Längsachse unter 45^0 gegen die Hauptachse geneigt ist. Dadurch fällt die Längsachse mit einer zweizähligen kristallographischen Hauptachse zusammen. Dieselbe

Lage der Längsachse hat VI, doch sind hier Breite und Dicke in ihrer Lagerung miteinander vertauscht. Für das elastische Verhalten bei der Biegung bedingt das keinen Unterschied, wohl aber bei der Drillung. Es wird sich zeigen, daß dieser Unterschied noch viel auffälliger bei der Dämpfung der Schwingungen wird. Auf dieses spezifisch kristallphysikalische Verhalten sei hier schon hingewiesen. Für IV und V fällt die Längsrichtung in die Granatoederebene, und zwar beträgt der Winkel zwischen der vierzähligen Hauptachse und der Längsrichtung bei IV 27°, bei V 54°. Die Dicke fällt in die Granatoederebene, die Breite liegt senkrecht dazu. V fällt mit seiner Längsrichtung in die dreizählige kristallographische Hauptachse. Genau beträgt der Winkel dieser Achse zwar etwas über 54°, doch zeigt die Rechnung, daß der dadurch bedingte Unterschied der elastischen Moduln vollständig innerhalb der Beobachtungsfehler liegt. Gleiches darf man wohl für die Dämpfungskonstanten annehmen. Sollte wirklich ein Unterschied vorhanden sein, so wird er doch für die vorliegende Untersuchung belanglos, da die bis jetzt gefundenen Zahlen nicht mehr als eine erste Annäherung an die wahren Werte darstellen können.

Über die Herkunft der Stäbchen sind mir von der Fabrik bereitwilligst genaue Angaben gemacht. Danach sind die Stäbchen der ersten Lieferung sämtlich aus Kristallen der gleichen Fundstelle geschnitten, sie dürften also im großen und ganzen ziemlich gleichwertiges Material darstellen. Es sind dann je die Stäbchen einer Sorte sämtlich aus demselben Kristall geschnitten, die verschiedener Sorten freilich aus verschiedenen Kristallen. Was ich von dem Material vorfand, reichte aus, um die gesamten Biegungsversuche durchzuführen, nur für I blieb die Bestimmung unsicher. Für die Drillung ließ sich die Untersuchung immerhin so weit führen, daß von sämtlichen Sorten wenigstens eine brauchbare Beobachtung an älterem Material vorliegt. Dann wurden von I, V und VI neue Stäbe hergestellt und zwar jetzt sämtlich aus demselben Kristall. Sie dienten zunächst dazu, die Drillungsbeobachtungen zu vervollständigen und die fehlenden Biegungsbeobachtungen für I zu liefern. Da ich schon durch einige

überraschende Resultate mißtrauisch geworden war, habe ich dann noch die drei längsten Stäbe von V auf Biegung untersucht. Bei dem neuen Material von VI war das nicht durchführbar, da gerade diese Sorte sehr leicht zerbrechlich ist und die beiden überhaupt hergestellten Stäbe bereits bei der Drillung zerbrachen. Schließlich hatte ich dann noch einige Stäbe von I herstellen lassen. Diese waren wieder aus einem andern Kristall geschnitten.

Theoretische Bemerkungen zu den Biegungsbeobachtungen.

In der Einleitung war bereits auf die vorhandenen theoretischen Ansätze hingewiesen worden. Hier soll kurz über dieselben referiert werden. Dabei werden sich dann die Formeln ergeben, die bei den folgenden Beobachtungstabellen Verwendung finden.

Boltzmann behandelt eingehend nur den Fall der Drillung bei isotropen Körpern. Da es hier nur darauf ankommt, zu zeigen, welches Resultat er erhält, wird es gestattet sein, über seinen Ansatz einfach in der ursprünglichen Form zu berichten. Geändert sind die Bezeichnungen, um in Übereinstimmung mit dem Folgenden zu bleiben. Es ist

$$(4) \qquad Y_z = \mu y_z - \int_0^\infty d\omega \cdot f(\omega) \cdot y_z(t-\omega).$$

Darin ist Y_z die Kraft parallel der y-Achse, die auf eine Ebene des Volumenelements ausgeübt wird, deren Normale parallel z ist. y_z ist die Winkeländerung zwischen zwei ursprünglich den Koordinatenebenen parallelen Ebenen, deren Schnittlinie parallel x war. $y_z(t-\omega)$ ist die Deformation, die um ω Zeiteinheiten vor der betrachteten Zeit t liegt. $f(t)$ gibt an, wie die Verminderung der Kraft durch die vorangegangenen Deformationen von der Zeit abhängt. Auf Grund plausibler Überlegungen trifft Boltzmann dann die Festsetzungen, daß $f(t) = \frac{\psi(t)}{t}$ ist, wo $\psi(t)$ für mäßige t fast konstant ist und

erst für große t abnimmt, und daß $\mu = \int_0^\infty \frac{\psi(\omega)\, d\omega}{\omega}$,

also

$$Y_z = \int_0^\infty \Big(y_z(t) - y_z(t-\omega) \Big) \psi(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \tag{5}$$

Nun ist

$$y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6}$$

Für die Drillung gilt, wenn L die Länge des Drahtes, R seinen Radius bezeichnet, die z-Achse mit der Längsachse zusammenfällt und ϑ der Verdrillungswinkel des Querschnittes $z = L$ ist,

$$u = -\frac{zy}{L}\vartheta, v = +\frac{xz}{L}\vartheta, w = 0. \tag{7}$$

Nun sei M das Trägheitsmoment der angehängten Scheibe, dann ist

$$-M \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2L} \int_0^\infty \Big(\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega) \Big) \psi(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \tag{8}$$

Wir setzen für negative t $\vartheta(t) = 0$, für positive t

$$\vartheta(t) = Ce^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{T} \tag{9}$$

Setzt man diesen Wert in (8) ein, so ergeben sich zwei Gleichungen für ε und T. Aus ihnen folgt in erster Annäherung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2ML}{\pi R^4 c}}, \tag{10}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 b}{16 LM} T. \tag{11}$$

Dabei sind b und c Materialkonstanten. Schließlich ist das logarithmische Dekrement

$$l = \varepsilon T = \frac{\pi R^4 b}{16 LM} T^2 = \frac{b\pi^2}{2c}, \tag{12}$$

d. h., l hängt nur von dem Material des Drahtes ab. Die An-

gabe dieses Resultates schien mir wünschenswert, weil sich für die Biegungsbeobachtungen beim Steinsalz I als merklich konstant erwiesen hat.

Zweitens werde ich über den theoretischen Ansatz referieren, den Herr Voigt in den genannten Abhandlungen entwickelt hat. Ich werde dabei wesentlich die allgemeine Fassung wählen, die der Ansatz später im Kompendium der Physik [1]) erhalten hat. Um den Boltzmannschen Ansatz auf Kristalle anwenden zu können, hat man für die Druckkomponenten zu setzen

$$(13)\quad -(X_x)=\int_0^\infty d\omega\,[f_{11}(\omega)\,x_x(t-\omega)+f_{12}(\omega)\,y_y(t-\omega)+f_{13}(\omega)\,z_z(t-\omega)$$
$$+f_{14}(\omega)\,y_z(t-\omega)+f_{15}(\omega)\,z_x(t-\omega)+f_{16}(\omega)\,x_y(t-\omega)]\ \text{usw.}$$

Auf die Integrale wenden wir jetzt das Verfahren an, das Maxwell für den Boltzmannschen Ansatz gegeben hat. Es möge die Entwicklung gelten

$$(14)\qquad \xi(t-\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^j\omega^j}{j!}\frac{\partial^j\xi(t)}{\partial t^j},$$

also

$$(15)\qquad \int_0^\infty f_{hk}(\omega)\,\xi(t-\omega)\,d\omega=\sum_{j=0}^{\infty}{}'\frac{\partial^j\xi(t)}{\partial t^j}\int_0^\infty\frac{(-1)^j\omega^j}{j!}f_{hk}(\omega)\,d\omega.$$

Setzen wir noch

$$(16)\qquad \int_0^\infty\frac{(-1)^j\omega^j}{j!}f_{hk}(\omega)\,d\omega=c_{hk}{}^{(j)},$$

so gelangen wir zu der Reihe

$$(17)\quad -(X_x)=\sum_{=0}^{\infty}{}'\Big(c_{11}{}^{(j)}\frac{\partial^j x_x}{\partial t^j}+c_{12}{}^{(j)}\frac{\partial^j y_z}{\partial t^j}+c_{13}{}^{(j)}\frac{\partial^j z_z}{\partial t^j}$$
$$+c_{14}{}^{(j)}\frac{\partial^j y_z}{\partial t^j}+c_{15}{}^{(j)}\frac{\partial^j z_x}{\partial t^j}+c_{16}{}^{(j)}\frac{\partial^j x_y}{\partial t^j}\Big)\ \text{usw.}$$

Diese Maxwellsche Reihe legen wir den folgenden Ausführungen zugrunde.

---

[1]) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Band I, S. 456ff., Leipzig 1895.

$$(18)\quad -X_x = c_{11}{}^0 x_x + c_{12}{}^0 y_y + c_{13}{}^0 z_z + c_{14}{}^0 y_z + c_{15}{}^0 z_x + c_{16}{}^0 x_y$$

sind darin die gewöhnlichen elastischen Druckkomponenten.

$$(19)\qquad -A_x = -(X_x) + X_x$$

nennen wir die Komponente der inneren Reibung im allgemeinsten Sinne.

Dieser allgemeine Ansatz für die Druckkomponenten in einem elastischen Körper soll angewandt werden, um die Bewegung prismatischer Stäbe zu untersuchen. Wir nehmen dazu an, daß sich die Gleichungen (17) durch Annäherung nach den $x_x, \ldots, x_y$ auflösen lassen, sodaß

$$(20)\quad \begin{aligned} -x_x = \sum_{j=0}^{\infty}{}' \Big(& s_{11}{}^{(j)} \frac{\partial^j (X_x)}{\partial t^j} + s_{12}{}^{(j)} \frac{\partial^j (Y_y)}{\partial t^j} + s_{13}{}^{(j)} \frac{\partial^j (Z_z)}{\partial t^j} \\ & + s_{14}{}^{(j)} \frac{\partial^j (Y_z)}{\partial t^j} + s_{15}{}^{(j)} \frac{(\partial^j Z_x)}{\partial t^j} + s_{16}{}^{(j)} \frac{\partial^j X_y)}{\partial t^j} \Big) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Längsachse des Stabes sei die z-Achse. Es soll im folgenden nur der Fall untersucht werden, daß die Deformationsgrößen und damit die Druckkomponenten längs der z-Achse konstant sind. Dazu ist notwendig, daß auf die freie Grundfläche des Stabes keine andern Kräfte als Drehungsmomente A, M, N um die Achse und eine Gesamtkomponente Γ nach der z-Achse wirken. Außerdem soll der Stab mit einer trägen Masse derart verbunden sein, daß er nur langsame Schwingungen ausführt. Dann kann in den Bewegungsgleichungen die Beschleunigung vernachlässigt werden, und wir erhalten die einfache Form

$$(21)\quad 0 = \frac{\partial (X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y)}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial (Y_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Y_y)}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial (Z_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Z_y)}{\partial y},$$

dazu treten die Randbedingungen

$$(22)\quad \begin{gathered} (X_x)\cos(nx) + (X_y)\cos(ny) = 0, \quad (Y_x)\cos(nx) + (Y_y)\cos(ny) = 0, \\ (Z_x)\cos(nx) + (Z_y)\cos(ny) = 0 \end{gathered}$$

und eine Reihe daraus folgender Integralformeln, die für jeden Querschnitt gelten.

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \; y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \; z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\
y_z &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \; z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \; x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Weil sämtliche Deformationsgrößen von z unabhängig sein sollen, müssen u, v, w folgende Gestalt haben:

$$
\begin{aligned}
u &= U + z(f_1 - hy) - \tfrac{1}{2} z^2 g_1, \\
v &= V + z(f_2 + hx) - \tfrac{1}{2} z^2 g_2, \\
w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3)
\end{aligned} \tag{24}
$$

worin U, V, W nur Funktionen von x und y sind. Jetzt führen wir Befestigungsbedingungen ein. Für $x = y = z = 0$ soll $u = v = w = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ und für $x = y = 0$, $z = L$ (Länge des Stabes) $u = v = 0$ sein.

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
u &= U + z(\tfrac{1}{2} g_1 (L - z) - hy) \\
v &= V + z(\tfrac{1}{2} g_2 (L - z) + hx) \\
w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3)
\end{aligned} \tag{25}
$$

wobei für $x = y = 0$ $U = V = W = 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$.

Dabei messen g_1 und g_2 die Biegung in der xz- bzw. yz-Ebene, g_3 mißt die lineare Dilatation der Achsenfaser $x = y = 0$. h ist die spezifische Drillung des Stabes.

Setzt man in die dritte Gleichung (20) den Wert $z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ aus (25) ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
g_1 x + g_2 y + g_3 = -\sum_{j=0}^{\infty} \Big(& s_{31}{}^{(j)} \frac{\partial^j (X_x)}{\partial t^j} + s_{32}{}^{(j)} \frac{\partial^j (Y_y)}{\partial t^j} \\
& + \ldots + s_{36} \frac{\partial^{(j)} (X_y)}{\partial t^j} \Big).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Wir legen jetzt den Koordinatenanfangspunkt in den

Schwerpunkt der Grundfläche $z = 0$, die Koordinatenachsen x und y in die Hauptträgheitsachsen derselben, also

$$\int x\,dq = 0,\ \int y\,dq = 0,\ \int xy\,dq = 0. \tag{27}$$

Ferner kürzen wir ab

$$\int x^2\,dq = Qk_y^2,\ \int y^2\,dq = Qk_x^2. \tag{28}$$

Bei den Biegungsversuchen ist die Anordnung so getroffen, daß nur A auftritt. Wir multiplizieren Gleichung (26) mit y und integrieren über den Querschnitt. Dann gilt

$$g_2 = \frac{1}{Qk_x^2}\sum_{j=0}^{\infty} s_{33}^{(j)}\,\frac{\partial^j A}{\partial t^j} \tag{29}$$

Der Stab versetzt eine schwere Scheibe in Schwingungen um die x-Achse. Ist ψ_x der Drehungswinkel der Scheibe, M_x ihr Trägheitsmoment, so ist

$$M_x\,\psi_x'' = -A, \tag{30}$$

$$g_2 L = \psi_x, \tag{31}$$

also

$$-\psi_x = \frac{LM_x}{Qk_x^2}\sum_{j=0}^{\infty} s_{33}^{(j)}\,\frac{\partial^{j+2}\psi_x}{\partial t^{j+2}}. \tag{32}$$

Um sie zu lösen, setzen wir

$$\psi = e^{-(\mu - i\nu)t}. \tag{33}$$

Darin bestimmen sich die Konstanten μ und ν durch sukzessive Annäherung. Die Lösung gibt gedämpfte Schwingungen, deren Dauer und Dämpfung sich durch die Konstanten $s_{33}^{(j)}$ ausdrückt.

Herr Voigt untersucht nun in seiner ersten theoretischen Arbeit, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn man sich in Gleichung (17) auf die ersten Differentialquotienten nach der Zeit beschränkt. Diese Beschränkung hat sich in der Hydrodynamik als ausreichend erwiesen, um die vorhandenen Beobachtungen darzustellen. Aus Gleichung (32) folgt in dieser Annäherung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + b\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3} + a\,\psi = 0, \tag{34}$$

$$a = \frac{Q k_x^2}{s_{33} L M_x}, \quad b = \frac{s_{33}^{(1)}}{s_{33}}. \tag{35}$$

Daraus folgt durch Einsetzen von (33)

$$\mu^2 - \nu^2 - b(\mu^3 - 3\mu\nu^2) + a = 0, \tag{36}$$

$$2\mu - b(3\mu^2 - \nu^2) = 0, \tag{37}$$

$$2\mu - 8b\mu^2 + 8b^2\mu^3 = -ab. \tag{38}$$

Da b eine kleine Größe ist, können wir die Gleichung durch Annäherung lösen:

$$\mu = -\frac{ab}{2}(1 - 2ab^2 + 7a^2b^4 + \ldots) \tag{39}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \nu^2 = a(1 - \tfrac{5}{4}ab^2 + 4a^2b^4 + \ldots) \tag{40}$$

In erster Annäherung gilt also

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = a = \frac{Q k_x^2}{s_{33} L M_x}. \tag{41}$$

Für einen rechtwinkligen Querschnitt mit den Dimensionen B ($\| x$) und D ($\| y$) ist bei der angegebenen Lage der Koordinatenachsen

$$Q k_x^2 = \frac{BD^3}{12}, \tag{42}$$

also kommen wir zu der weiter unten benutzten Formel

$$s_{33} = \frac{BD^3T^2}{48\pi^2 LM} \tag{43}$$

Das logarithmische Dekrement der Schwingung ist in erster Annäherung gegeben durch

$$l = \mu T = -\frac{s_{33}^{(1)}}{s_{33}} \cdot \frac{2\pi^2}{T} \tag{44}$$

Da nun s_{33} wie $s_{33}^{(1)}$ Materialkonstanten darstellen, so muß unter der gemachten Annahme das logarithmische Dekrement umgekehrt proportional der Schwingungszeit sein.

Schließlich ist noch ein Wort über die Symmetrieverhältnisse zu sagen. Aus den Eigenschaften des thermodynamischen Potentials für isothermische elastische Vorgänge und aus allgemeinen Sätzen folgt, sofern die gestrichenen Moduln sich auf das bisher benutzte Koordinatensystem, die ungestrichenen auf das kristallographische Hauptachsensystem beziehen, und wenn γ_1, γ_2, γ_3 die Richtungskosinus der Längsachse des Stabes gegen die Hauptachsen sind, daß für das reguläre System gilt

$$(45)\quad s_{33}' = s_{11} - 2\,[(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}\,s_{44}]\,(\gamma_2^2\,\gamma_3^2 + \gamma_3^2\,\gamma_1^2 + \gamma_1^2\,\gamma_2^2)$$

Genau die gleiche Formel gilt für sämtliche $s_{33}^{(j)}$.

Um die Symmetrie von l zu erkennen, greifen wir auf Formel (17) zurück. Setzt man darin Lösungen von der Form (33) ein, so erhält man

$$(46)\quad -(X_x) = C_{11}\,x_x + C_{12}\,y_y + C_{13}\,z_z + C_{14}\,y_z + C_{15}\,z_x + C_{16}\,x_y$$

wobei die C_{hk} komplexe Größen sind von der Form

$$(47)\qquad C_{hk} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, c_{hk}^{(j)}\,(\mu - i\nu)^j = C'_{hk} + i\,C''_{hk}$$

In erster Annäherung ist wegen der Kleinheit von μ

$$(48)\qquad C_{hk} = c_{hk} + i\nu\, c_{hk}^{(1)}$$

Löst man die Gleichungen (46) nach den $x_x, \ldots, x_y$ auf, so findet man

$$(49)\quad -x_x = S_{11}\,(X_x) + S_{12}\,(Y_y) + S_{13}\,(Z_z) + S_{14}\,(Y_z) + S_{15}\,(Z_x) + S_{16}\,(X_y).$$

Die S_{hk} sind Determinantenverhältnisse der C_{hk} und im allgemeinen überaus komplizierte Ausdrücke. Berechnet man sie in der gleichen Annäherung wie die C_{hk} in (48), so wird

$$(50)\qquad S_{hk} = s_{hk} + i\nu\, s_{hk}^{(1)}.$$

Nun ergeben die Beobachtungen l als konstant für Stäbe gleicher Orientierung, also das Boltzmannsche Resultat als gültig. Das kommt darauf hinaus, daß in (50) $\nu\, s_{hk}^{(1)}$ durch r_{hk} ersetzt wird, wo r_{hk} der Substanz individuell ist und die Symmetrie von $s_{hk}^{(1)}$ hat. Macht man den entsprechenden Übergang in (44), so wird

(51) $$l = -\frac{r_{33}\,\pi}{s_{33}} \text{ oder}$$

(52) $$l \cdot s_{33} = -\pi\, r_{33},$$

d. h. $l \cdot s_{33}$ hat die Symmetrie von r_{33}, oder mit andern Worten

(53) $$l' \cdot s_{33}' = A + B(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2)$$

Die Beobachtung der Biegungsschwingungen.

Die Beobachtung der Schwingungen geschieht auf photographischen Wege. In einer Entfernung von etwa 1 m von dem Spiegel l (Fig. 1) des Apparates befindet sich ein kleiner Induktionsfunke. Um bei möglichst unveränderter Stellung und Größe des Funkens ein recht wirksames Licht zu erzielen, springt der Funke zwischen zwei Kadmiumstiften über, von denen der eine am Ende etwa 0,5 mm dick und schwach zugespitzt ist, der andere aber eine schwach gerundete Endfläche von 3 mm Durchmesser besitzt. Durch eine Schraube läßt sich die Entfernung der Spitze von der Platte sehr genau regulieren. Vor jedem Versuch wird die Platte frisch abgeschmirgelt. Dann wird die Spitze an die Platte geschraubt, bis Berührung stattfindet und schließlich wenig zurückgedreht, daß der Funke gerade scharf sichtbar ist. Die Breite des Funkens übertrifft dann seine Länge wenigstens um das sechsfache, sodaß das einzelne Funkenbild auf der Photographie in Form eines feinen wagerechten Striches erscheint. Die von dem Fünkchen ausgehenden Strahlen fallen auf den Spiegel des Apparates. Es ist dies ein gläserner, an der Oberfläche versilberter Hohlspiegel von 92 cm Krümmungsradius. Um stets gute Bilder zu erzielen, ist ein öfteres Neuversilbern des Spiegels notwendig. Das Funkenbild erfährt am Spiegel eine recht vollständige Reflektion und fällt dann auf eine rotierende Trommel. Die Achse der Trommel steht senkrecht zur Schwingungsachse des Systems. Mit der Trommel rotiert ein Streifen eines Kodakfilms, auf dem sich das Funkenbild aufzeichnet.

Der Spiegel ist fest mit der Scheibe verbunden, macht also deren Schwingung mit. Dabei zeichnet der Induktions-

funke auf dem Film eine Sinuslinie mit abnehmender Amplitude, die nach dem Entwickeln schwarz auf durchsichtigem Grunde erscheint. Der Film reicht während des Versuchs um die ganze Trommel herum. Da der Funke überspringt, solange der Versuch andauert, zeichnet sich eine fortlaufende Linie auf dem Film ab, sodaß bei mehrmaliger Rotation der Trommel hernach verschiedene Teile der Sinuslinie übereinander erscheinen. Da diese Teile aber auch verschiedene Amplituden haben, stört das die Ausmessung in keiner Weise.

An dieser Photographie der Schwingung werden dann die eigentlichen Messungen vorgenommen, und zwar wird einmal die Schwingungszeit T des Stabes, zum andern die Dämpfung der Schwingung bestimmt. Um die Schwingungszeit zu bestimmen, wird nach Beginn der Schwingung und gegen Ende des Versuches der Funke je einen Augenblick unterbrochen. Die Zeit zwischen beiden Unterbrechungen wird mit der Stoppuhr festgestellt. Auf diese Weise läßt sich die jeweilige Schwingungszeit durch Auszählen der Schwingungen auf der Photographie recht genau ermitteln. Aus der Schwingungszeit und den Dimensionen des Stabes ist dann jedesmal der Elastizitätsmodul berechnet.

Vor allen Dingen aber diente die Photographie zur Bestimmung der Dämpfung der Schwingung. In gleichen Intervallen wurde die Größe der Amplitude bestimmt. Zu dem Zweck wurde der Film zwischen zwei Glasplatten gepreßt, unter denen weißes Papier lag, um die Photographie möglichst deutlich hervortreten zu lassen. Die Ausmessung geschah mit einem Millimetermikroskop, das für die vorliegenden Zwecke hinreichend genau war. Es gestattete, die Amplituden auf dem Film bis auf 0,02—0,03 mm genau zu messen. Einer weiter gehenden Genauigkeit war durch die Größe des Funkenbildes meist ein Ziel gesetzt. Hin und wieder traten aber doch auch bei großer Sorgfalt durch Flackern des Funkens oder durch kleine Ungenauigkeiten in der Einstellung des Funkenbildes auf der Walze größere Ungenauigkeiten beim Ausmessen auf.

Wie schon gesagt, befanden sich die Enden der Steinsalzstäbe in massiven Messingfassungen. Die Fassungen sind so

groß, daß die in ihnen erregten Spannungen bei den sehr geringen Ausschlagswinkeln der Schwingungen sicher vernachlässigt werden können. Zum Einkitten der Stäbe in die Fassung wurde leichtflüssiges Kolophoniumwachs benutzt. Um nach Möglichkeit einen Einfluß des Kittmittels auf die Dämpfung der Schwingung auszuschließen, bestellte ich mir Fassungen mit zu engen Schlitzen und feilte sie dann selbst so weit aus, daß der betreffende Stab auch ohne Kittmittel schon so fest in der Fassung haftete, daß diese sich an dem Stabe in senkrechter Haltung tragen ließ, ehe sie angekittet war. Die Länge der Stäbe wurde vom Austritt aus den Fassungen an gerechnet. Um eine scharf definierte Austrittsstelle zu haben, wurde sämtliches überflüssige Wachs mit einem heißen Kupferblech entfernt, das nach Art eines Schraubenziehers in einem Holzgriff saß und dessen Schneide stets scharf und glatt gehalten wurde. Es gelang so recht gut, die Stäbe auch nahe den Fassungen vom Wachs sauber zu halten. Trotzdem scheint der Einfluß des Kittmittels nicht ganz aus den endgültigen Resultaten entfernt. Offenbar äußert sich dieser Einfluß stets in einer Vergrößerung der Dämpfung. Mir scheint, als ob eine Reihe besonders älterer Beobachtungen, die auffällig große Dämpfung zeigten, hierin ihre Erklärung finden. In der Regel gelang es nämlich bei wiederholten Versuchen unter Anwendung äußerster Sorgfalt unter sich übereinstimmende Resultate zu erhalten, die beträchtlich kleinere Dämpfung ergaben. In solchen Fällen habe ich die ältere Beobachtung dann unterdrückt.

Eine zweite sehr wesentliche Fehlerquelle ist beim Biegungsapparat durch die Drehung um die Spitzen *e* gegeben. Ist diese Drehungsachse genau parallel der Karneolschneide, so ist ihr Einfluß auf die Dämpfung sehr gering. Ist aber dieser Parallelismus gestört, so wird dadurch ein Gleiten der Karneolschneide auf ihrer Unterlage und damit eine Vergrößerung der Dämpfung bewirkt.

Da für jeden Stab auch der Elastizitätsmodul bestimmt werden sollte, war es nötig, die Dimensionen der Stäbe und das Trägheitsmoment der Scheibe zu kennen. Die Länge L

ließ sich leicht und recht genau mit dem Millimeterlineal messen. Die Breite B wurde mit einem gewöhnlichen Schraubenmikrometer an 10 verschiedenen Stellen in gleichen Abständen längs der Achse des Stabes gemessen. Hier wie bei der Dicke wurde aus den Beobachtungen das arithmetische Mittel in Rechnung gesetzt, da es sich um gleichförmige Biegung handelte.

Länge und Breite treten in den Formeln nur linear auf, die Dicke D dagegen in der dritten Potenz. Es erschien demnach wünschenswert, die Dicke mit größerer Genauigkeit zu bestimmen. Aus dem Grunde ist die Dicke mit einem Sphärometer gemessen, das noch 0,001 mm sicher zu messen gestattete. Wegen der Beschreibung des Apparates und wegen der Korrektur der damit ausgeführten Messungen verweise ich auf eine Abhandlung von Herrn Voigt[1]). Die Dicke ist im allgemeinen an 20 verschiedenen Stellen gemessen, und zwar je 10 längs einer Geraden auf $^1/_4$ und auf $^3/_4$ der Breite. Zeigten sich aber starke Abweichungen in den Dicken der beiden Seiten des Stabes, so wurden mindestens noch 10 weitere Messungen in der Mittellinie vorgenommen.

Das Trägheitsmoment der Biegungsscheibe war bereits früher durch Herrn Voigt bestimmt. Da ich aber einige Änderungen an den Gegengewichten vorgenommen hatte, erschien eine neue Messung wünschenswert. Die Scheibe wurde bifilar so aufgehängt, daß sie sich um dieselbe Achse wie bei den eigentlichen Versuchen drehen konnte. Zwei gleiche zylindrische Zusatzstücke von der Masse m und dem Trägheitsradius k wurden zunächst in der Entfernung e_1 vom Mittelpunkte möglichst nahe dem Rande der Scheibe, dann in der Entfernung e_2 möglichst nahe dem Mittelpunkte befestigt. T_1 und T_2 sind die zugehörigen Schwingungszeiten des Systems. Daraus berechnet sich das gesuchte Trägheitsmoment M nach der Formel

$$M = 2m \frac{T_2^2 (k^2 + e_1^2) - T_1^2 (k^2 + e_2^2)}{T_1^2 - T_2^2} \tag{54}$$

---

[1]) W. Voigt. Neue Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Flußspat und Steinsalz. Berl. Ber. 1884.

Es fand sich

$$e_1 = 9{,}48\ cm \quad T_1 = 35{,}788\ sec$$
$$e_2 = 1{,}52\ \text{„} \quad T_2 = 26{,}840\ \text{„}$$
$$r = 0{,}91\ \text{„} \quad k^2 = 0{,}414\ cm^2$$
$$2m = 685{,}4\ gr$$
$$M = 75\,286\ cm^2 gr.$$

Dieses Trägheitsmoment bezieht sich auf die Karneolschneide als Achse. Daher war es dann vor Beginn der Versuche nötig, nachdem der Stab eingekittet war und damit die Stellung des oberen Messingstückes feststand, die Scheibe samt allen Teilen, die an der Schwingung teilnahmen (also auch mit einer eingeschraubten oberen Fassung) in indifferentes Gleichgewicht zu bringen. Das geschah mit Hilfe des unteren Gegengewichtes. Praktisch verschwand der Einfluß der Scheibe bereits, wenn die Schwingungszeit des Systems etwa 30 *sec* betrug, also groß gegen die Biegungsschwingungen war, bei denen die längsten Schwingungen etwa 0,7 *sec* dauerten.

Mit Hilfe dieser Angaben war es jetzt für jeden Stab möglich, den Biegungsmodul s_{33}' in absolutem Maße zu berechnen nach der Formel

$$s_{33}' = \frac{BD^3T^2}{48\pi^2 ML} \tag{55}$$

Einen Fortschritt bezeichnet die Beobachtung dieser Moduln nicht, da dieselben auf statischem Wege wesentlich genauer bestimmt sind als es bei dieser Methode möglich ist[1]). Immerhin war die Berechnung wünschenswert, da ihre Kenntnis bei Anwendung des Ansatzes für die innere Reibung, wie er von Herrn Voigt gegeben ist, notwendig ist. Umsomehr wird sich die Berechnung bei der Drillung als notwendig erweisen, weil die dort für die Dämpfung gefundenen Konstanten sich vorläufig in keine Theorie einordnen.

Für die Berechnung der Dämpfung benutze ich Formeln, die bereits von Herrn Voigt für seine Untersuchung benutzt

[1]) Kristallphysik, S. 741.

waren[1]). Die Beobachtung lehrt nämlich, daß das logarithmische Dekrement nicht genau konstant ist, wie es die Theorie für unendlich kleine Schwingungen verlangt, sondern mit abnehmender Amplitude selbst abnimmt. Die Hauptursache dieses Verhaltens wird darin gesucht, daß das dämpfende Glied in der Differentialgleichung für die Bewegung die Deformationsgeschwindigkeit χ' nicht nur linear, sondern auch in der dritten Potenz enthält, daß die Differentialgleichung also lautet:

$$\chi'' + \beta(\chi + d\chi' + d_1 \chi'^3) = 0. \tag{56}$$

Da d_1 klein gegen d ist (die Beobachtung bestätigt das in weitem Umfang), kann die Integration bezüglich dieses letzten Gliedes durch eine Annäherung geschehen, indem man für χ'^2 für eine kleine Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen einen mittleren Wert setzt. Dieser Mittelwert ist proportional mit dem Quadrat der augenblicklichen Schwingungsamplitude A. Dadurch geht die obige Gleichung über in

$$\chi'' + \beta[\chi + (d + e A^2)\chi'] = 0. \tag{57}$$

Sie wird integriert durch

$$\chi = Ce^{-\mu t} \cos \pi \nu (t - t'), \tag{58}$$

worin

$$\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\beta - \frac{\beta^2 (d + e A^2)^2}{4}} \tag{59}$$

und

$$\mu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\beta (d + e A^2)}{2}. \tag{60}$$

λ hat dabei die Bedeutung des logarithmischen Dekrements. Die Formeln ergeben nun

$$\lambda = \frac{\beta T}{2}(d + e A^2) = A + A_1 A^2. \tag{61}$$

Dabei ist A das eigentlich gesuchte logarithmische Dekrement für unendlich kleine Schwingungen. Ist A_h die h. beob-

[1]) W. Voigt, Bestimmung der Konstanten usw. § 6. Gött. Abhandlungen, Bd. 38.

achtete Amplitüde, so kann man für die Berechnung zwischen der $h.$ und $(h+1).$ Beobachtung in dem Korrektionsglied die Amplitude konstant gleich dem Mittel $\frac{A_h + A_{h+1}}{2}$ setzen. Man erhält so für den natürlichen Logarithmus der $h.$ Amplitude die Gleichung

$$(62) \quad lg\, A_h = z + h\,\Lambda + A_1 \left[\left(\frac{A_0 + A_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{A_1 + A_2}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{A_{h-1} + A_h}{2} \right)^2 \right]$$

Für die Bestimmung der drei Unbekannten z, Λ und A_1 standen dann aus den Beobachtungen eine Reihe von Gleichungen zur Verfügung, die mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst wurden. Aus den gefundenen Werten wurde rückwärts die Reihe der Amplituden berechnet und den beobachteten gegenüber gestellt, um ein Urteil über den Grad der Übereinstimmung zu erhalten. Der gefundene Wert von Λ beruht nicht allein auf der Wirkung der dämpfenden Kräfte im Innern des Stabes, sondern auch auf der Achsenreibung und dem Luftwiderstand. Diese waren bereits früher von Herrn Voigt bestimmt, aber vor den endgültigen Versuchen hatte ich die Schneide neu schleifen lassen. So war eine neue Bestimmung dieser Werte notwendig. Sie geschah auf folgende Weise: Das untere Gegengewicht wurde durch ein gleich großes und gleichgeformtes aus Blei, das obere Messingstück mit der daran sitzenden Fassung durch gleiche Teile aus Holz ersetzt. In der Holzfassung saß ein Stück Karton von der Dicke und Breite der Stäbe, das bis zur Drehungsachse reichte. Jetzt war der Querschnitt der Scheibe unverändert, das Trägheitsmoment war nur wenig geändert (etwa um 3 %), dagegen hatte die Schwerkraft ein beträchtliches Moment erhalten, so daß die Scheibe Pendelschwingungen um ihre Achse ausführen konnte, deren Schwingungszeit von der Größenordnung der später zu beobachtenden Biegungsschwingungen war. Luftwiderstand und Achsenreibung waren also nahe dieselben wie bei den eigentlichen Versuchen. Andere dämpfende Kräfte waren überhaupt nicht vorhanden. So ließen sich beide jetzt ziemlich genau

bestimmen. Das geschah ebenfalls auf photographischem Wege, nach demselben Verfahren wie bei den eigentlichen Beobachtungen.

Die erste Beobachtung lieferte bei einer Schwingungszeit von 3,131 sek. folgende Amplitudenreihe:

beob.: 21,03, 18,99, 17,09, 15,21, 13,70, 12,50, 11,16, 10,09, 9,11.
ber.: 21,28, 19,00, 17,01, 15,27, 13,74, 12,38, 11,17, 10,01, 9,25.

Der Abstand zweier Amplituden beträgt $123^1/_2$ Schwingungen. Daraus findet sich $A_0 = 0{,}000\,850$.

Die wenig befriedigende Übereinstimmung veranlaßte eine Wiederholung des Versuches. Dabei fand sich eine Schwingungszeit von 3,158 sek. Bei einem Abstand von 285 Schwingungen ergaben sich die Amplitudenreihen:

beob.: 22,73, 18,17, 14,48, 11,42, 8,86, 6,87, 5,45,
ber.: 22,74, 18,20, 14,41, 11,34, 8,88, 6,94, 5,41.

Daraus berechnet sich $A_0 = 0{,}000\,882$. Bildet man beide Male den Wert $\frac{A_0}{T_0}$, wobei T_0 die Schwingungszeit bezeichnet, so findet sich im ersten Falle 0,000 272, im zweiten 0,000 279. In den folgenden Rechnungen wurde daraufhin gesetzt

$$\frac{A_0}{T_0} = 0{,}000\,275.$$

Resultate der Biegungsbeobachtungen.

Ich stelle jetzt im Folgenden die bei den Biegungsuntersuchungen erhaltenen Werte zusammen. Die arabische Ziffer bezeichnet die Nummer des Stabes innerhalb der verschiedenen Sorten. Verschiedene Beobachtungen an dem gleichen Stabe sind durch einen Buchstaben hinter der Stabnummer unterschieden. In der Regel ließ ich den Stab, während er in seiner Fassung verblieb und während der Apparat nicht die geringste Änderung erfuhr, mehrere Schwingungen nacheinander

ausführen. Aus den Amplitudenreihen für diese einzelnen Schwingungen ist dann ein Mittelwert unter beob. angegeben. Dieser Wert ist konsequent in der Weise gefunden, daß das arithmetische Mittel aus den Logarithmen der Amplituden bestimmt und mit diesem die oben angegebene Rechnung durchgeführt wurde. Daß diese Art, den Durchschnitt zu bilden, auf merklich denselben Wert von Λ führt, wie der umständlichere Weg, jede Beobachtung einzeln auszuwerten und dann das arithmetische Mittel der Λ zu bilden, zeigt folgendes Beispiel:

1. Beobachtung:

beob.: 8,74, 7,51, 6,45, 5,62, 4,84, 4,19, 3,69, 3,25, 2,82,
ber.: 8,76, 7,49, 6,45, 5,58, 4,85, 4,23, 3,69, 3,23, 2,82,
Λ_1 $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ Λ $4{,}31 \cdot 10^{-3}$ l $\mathbf{4{,}25} \cdot 10^{-3}$

2. Beobachtung:

beob.: 8,73, 7,46, 6,40, 5,56, 4,84, 4,25, 3,72, 3,29, 2,86,
ber.: 8,73, 7,44, 6,41, 5,56, 4,85, 4,24, 3,72, 3,27, 2,88,
Λ_1 $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Λ $4{,}08 \cdot 10^{-3}$ l $\mathbf{4.02} \cdot 10^{-3}$

3. Beobachtung:

beob.: 8,61, 7,41, 6,40, 5,58, 4,85, 4,24, 3,72, 3,29, 2,87,
ber.: 8,62, 7,40, 6,40, 5,57, 4,86, 4,25, 3,73, 3,27, 2,88,
Λ_1 $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ Λ $4{,}16 \cdot 10^{-3}$ l $\mathbf{4{,}10} \cdot 10^{-3}$

4. Beobachtung:

beob.: 8,80, 7,53, 6,51, 5,68, 4,94, 4,28, 3,81, 3,33 (2,94)
ber.: 8,80, 7,53, 6,51, 5,66, 4,94, 4,32, 3,79, 3,33, 2,94
Λ_1 $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Λ $4{,}16 \cdot 10^{-3}$ l $\mathbf{4{,}02} \cdot 10^{-3}$

Mittel:

beob.: 8,72, 7,48, 6,44, 5,61, 4,87, 4,24, 3,73, 3,29, 2,87,
ber.: 8,73, 7,47, 6,44, 5,59, 4,87, 4,26, 3,73, 3,27, 2,88,
Λ_1 $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Λ $4{,}08 \cdot 10^{-3}$ l $\mathbf{4{,}10} \cdot 10^{-3}$

4,10 ist genau das arithmetische Mittel aus den vorher angegebenen Werten. Diese Übereinstimmung ist auch an anderen Reihen geprüft worden. Auftretende Abweichungen gehen nie über $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ hinaus.

Die gefundenen Werte von A und A_1 sind unter den Amplitudenreihen angegeben. Der Wert x hat keinerlei Interesse. Aus den gefundenen Werten wurde dann die Reihe der Logarithmen neu berechnet. Die zugehörigen Amplituden sind in der mit ber. bezeichneten Reihe angegeben. Um noch einen weiteren Anhalt für den Grad der Übereinstimmung zu haben, wurde aus den Unterschieden der beobachteten und berechneten Werte der natürlichen Logarithmen nach Art des mittleren Fehlers in der Fehlerrechnung eine „mittlere Abweichung" (m. A.) berechnet und angegeben. λ ist das logarithmische Dekrement für unendlich kleine Schwingungen. Aus ihm wurde dann der Anteil l, der vom Stabe allein herrührt, nach der Formel

$$l = \lambda - \frac{\lambda_0 T}{T_0} \tag{63}$$

berechnet.

Dieser Wert von l erschien bei der Biegung für Stäbe derselben Gattung als merklich konstant. Daß die aus dem l berechneten Mittelwerte den richtigen Werten immerhin nahe liegen werden, scheint mir dadurch bestätigt, daß ihre Werte sich einigermaßen der Symmetrie des Kristalles einfügen. Das wird am Schluß der Beobachtungstabellen zu zeigen sein.

Die Größe der Amplituden ist in mm angegeben, und zwar wurde die Größe je gerechnet von einem Wellenberg bis zur Mitte zwischen den beiden benachbarten Tälern. Dabei beträgt die Entfernung zwischen dem Bildpunkte und der Drehungsachse etwa 95 cm. 1 mm auf der Photographie entspricht also einer Drehung der Scheibe um 3,6′, bei einer Stablänge von 10 cm also einer Verschiebung des oberen Stabrandes um 0,052 mm. Jeder angegebene Amplitudenwert ist das Mittel aus wenigstens drei Messungen.

Die Zahl J bezeichnet das Intervall zwischen zwei benachbarten Amplitudenwerten, gemessen in der Zahl der dazwischen liegenden Doppelschwingungen. JT ist demnach der zeitliche Abstand zwischen je zwei angegebenen Werten.

Für jeden Stab sind dann die Dimensionen L, B, D in cm, die Schwingungszeit T in Sekunden angegeben. Daraus ist s'_{33}

berechnet. Die angegebene Zahl s ist nicht dieser Wert im absoluten Maßsystem, sondern ein Wert, bei dem der Druck von 1 g auf den qcm als Einheit genommen ist, um einen Vergleich mit den von Herrn Voigt angegebenen Zahlen zu ermöglichen[1]). Er ist aus ersterem durch Multiplikation mit $g = 981$ erhalten. Weiter enthält die Tabelle die jeweilige Temperatur ϑ in Celsiusgraden. Die zum Teil recht hohen Werte sind nicht etwa versehentlich angegeben, sondern beruhen auf der ungünstigen Lage des Beobachtungsraumes, einer Bodenkammer unmittelbar unter dem Dache, in der in dem letzten heißen Sommer oft recht hohe Temperaturen herrschten.

Ich werde bei den einzelnen Sorten noch einmal auf die Orientierung hinweisen, dabei aber nur die Längsrichtung angeben, da diese allein für die Biegung von Interesse ist.

I. Die Längsrichtung fällt in die Würfelnormale.

1) L 7,60, B 0,501, D 0,1628, T 0,558, s 24,4 · 10^{-10}, ϑ 18,7°, J 10.
beob.: 11,17, 7,28, 4,86, 3,29, 2,25.
ber.: 11,17, 7,27, 4,87, 3,30, 2,25.
m. A.: 0,16 · 10^{-2} A_1 6,0 · 15^{-5} A 3,79 · 10^{-2} l **3,77** · 10^{-2}.

2a) L 8,77, B 0,501, D 0,1605, T 0,620, s 25,0 · 10^{-10}, ϑ 20,8°, J 10.
beob.: 21,32, 14,91, 10,59, 7,61, 5,46, 3,95, 2,88.
ber.: 21,36, 14,89, 10,59, 7,60, 5,48, 3,96, 2,87.
m. A.: 0,32 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 3,22 · 10^{-2} l **3,20** · 10^{-2}

2b) L 7,85, B 0,501, D 0,1605, T 0,575, s 24,0 · 10^{-10}, ϑ 19,0°, J 10.
beob.: 13,75, 9,17, 6,26, 4,25, 2,98, 2,14.
ber.: 13,81, 9,09, 6,21, 4,31, 3,02, 2,12.
m. A.: 1,17 · 10^{-2} A_1 5,2 · 10^{-5} A 3,50 · 10^{-2} l **3,49** · 10^{-2}.

Die drei Beobachtungen zeigen durchaus keine gute Übereinstimmung. Eine Wiederholung an dem gleichen Material war ausgeschlossen, da die Stäbe zerbrochen und jetzt für die Biegung zu kurz waren. Im Mittel ist

$$l = \mathbf{3{,}49} \cdot 10^{-2}$$

bei einem mittleren Beobachtungsfehler von 0,29 · 10^{-2}. Von

[1]) Kristallphysik, S. 741.

den folgenden Stäben stammen 3 und 5 von der 2., 6, 8 und 9 von der 3. Lieferung, 4 und 7 waren bei der Drillung zerbrochen. Der Wert von 8 liegt beträchtlich unter den übrigen, doch sind im allgemeinen kleinere Werte wahrscheinlicher als größere, da alle auftretenden Fehlerquellen die Dämpfung vergrößern. Sämtliche Werte müssen ausdrücklich als unsicher bezeichnet werden, da die Beobachtungen bei abnorm hoher Temperatur angestellt sind.

3) L 7,45, B 0,503, D 0,1525, T 0,605, s 24,1 · 10^{-10}, ϑ 29,0°, J 5
beob.: 10,14, 8,05, 6,44, 5,16, 4,13, 3,37, 2,75, 2,26, 1,85.
ber.: 10,20, 8,01, 6,39, 5,14, 4,17, 3,39, 2,76, 2,25, 1,84.
m. A.: 0,66 · 10^{-2} A_1 9,9 · 10^{-5} A 4,00 · 10^{-2} l **3,98** · 10^{-2}.

5) L 6,75, B 0,505, D 0,1475, T 0,600, s 24,2 · 10^{-10}, ϑ 26,6°, J 5.
beob.: 8,84, 6,92, 5,43, 4,30, 3,45, 2,80, 2,26, 1,87.
ber.: 8,91, 6,87, 5,41, 4,31, 3,47, 2,80, 2,27, 1,85.
m. A. 0,64 · 10^{-2} A_1 18,1 · 10^{-5} A 4,08 · 10^{-2} l **4,07** · 10^{-2}.

6) L 6.30, B 0,509, D 0,1514, T 0,578, s 25,8 · 10^{-10}, ϑ 28,4°, J 5.
beob.: 8,81, 6,86, 5,38, 4,23, 3,36, 2,70, 2,19, 1,79.
ber.: 8,87, 6,80, 5,33, 4,23, 3,39, 2,72, 2,20, 1,78.
m. A.: 0,77 · 10^{-2} A_1 18,0 · 10^{-5} A 4,20 · 10^{-2} l **4,18** · 10^{-2}.

8) L 9,25, B 0,489, D 0,1524, T 0,682, s 23,9 · 10^{-10}, ϑ 27,4°, J 5.
beob.: 9,96, 7,91, 6,35, 5,10, 4,15, 3,40, 2,80, 2,33, 1,94.
ber.: 10,02, 7,86, 6,29, 5,10, 4,17, 3,42, 2,82, 2,33, 1,92.
m. A.: 0,67 · 10^{-2} A_1 13,9 · 10^{-5} A 3,74 · 10^{-2} l **3,72** · 10^{-2}.

9) L 8,45, B 0,480, D 0,1517, T 0,665, s 24,1 · 10^{-10}, ϑ 27,7°, J 5.
beob.: 13,20, 10,32, 8,22, 6,49, 5,20, 4,17, 3,40, 2,78, 2,32.
ber.: 13,30, 10,27, 8,10, 6,47, 5,22, 4,23, 3,43, 2,80, 2,28.
m. A.: 1,08 · 10^{-2} A_1 8,3 · 10^{-5} A 4,05 · 10^{-2} l **4,03** · 10^{-2}.

Bildet man aus den gefundenen Werten das arithmetische Mittel, so erhält man

$$s = \mathbf{24{,}4} \cdot 10^{-10}$$
$$l = \mathbf{4{,}00} \cdot 10^{-2}.$$

Dabei beträgt der mittlere Beobachtungsfehler für s 0,6 · 10^{-10}, für l 10,17 · 10^{-2}.

Die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Amplituden ist bei dieser Orientierung keineswegs be-

friedigend. Das liegt zum Teil wohl darin begründet, daß I wegen der starken Dämpfung und der leichten Zerbrechlichkeit der Untersuchung bei der Biegung (ganz im Gegensatz zur Drillung) recht erhebliche Schwierigkeiten bereitete.

II. Die Längsrichtung liegt in der Würfelebene unter $22^1/_2{}^0$ gegen die Achse.

1) L 10,00, B 0,488, D 0,1608, T 0,691, s $26{,}6 \cdot 10^{-10}$, ϑ 20,6°, J 10.
beob.: 15,05, 11,08, 8,26, 6,16, 4,60, 3,50, 2,68.
ber.: 15,09, 11,05, 8,21, 6,16, 4,65, 3,52, 2,66.
m. A.: $0{,}67 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}76 \cdot 10^{-2}$ l $\mathbf{2{,}74} \cdot 10^{-2}$.

2) L 9,38, B 0,488, D 0,1613, T 0,681, s $27{,}8 \cdot 10^{-10}$, ϑ 19,4°, J 10.
beob.: 13,78, 10,21, 7,61, 5,74, 4,31, 3,23, 2,47.
ber.: 13,78, 10,20, 7,62, 5,72, 4,31, 3,25, 2,46.
m. A.: $0{,}40 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}79 \cdot 10^{-2}$ l $\mathbf{2{,}78} \cdot 10^{-2}$.

3) L 10,05, B 0,486, D 0,1596, T 0,700, s $26{,}5 \cdot 10^{-10}$, ϑ 20,3°, J 20.
beob.: 15,04, 8,88, 5,32, 3,28, 2,03.
ber.: 15,06, 8,82, 5,35, 3,28, 2,02.
m. A.: $0{,}44 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}41 \cdot 10^{-2}$ l $\mathbf{2{,}39} \cdot 10^{-2}$.

4) ergab $l = 2{,}79 \cdot 10^{-2}$. Der Wert muß als unsicher bezeichnet werden, weil beobachtete und berechnete Amplituden kaum zusammenstimmen.

5) L 9,57, B 0,487, D 0,1602, T 0,691, s $27{,}5 \cdot 10^{-10}$, ϑ 21,0°, J 20.
beob.: 18,47, 10,66, 6,20, 3,69, 2,22.
ber.: 18,40, 10,58, 6,24, 3,71, 2,21.
m. A.: $0{,}61 \cdot 10^{-2}$ A_1 $0{,}9 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}57 \cdot 10^{-2}$ l $\mathbf{2{,}55} \cdot 10^{-2}$.

6) L 10,05 B 0,487, D 0,1605, T 0,693, s $26{,}4 \cdot 10^{-10}$, ϑ 20,0°, J 20.
beob.: 18,92, 10,38, 5,88, 3,39, 2,00.
ber.: 18,95, 10,32, 5,90, 3,42, 2,00.
m. A.: $0{,}63 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}69 \cdot 10^{-2}$ l $\mathbf{2{,}67} \cdot 10^{-2}$.

Der kleinste und größte Wert von l zeigen recht beträchtliche Unterschiede. Der kleinere ist stets der wahrscheinlichere, der größte Wert bei 4 aber fällt sehr nahe mit den Werten von 1 und 2 zusammen.

Im allgemeinen werden die Beobachtungen ziemlich richtig durch die Formel $\lambda = A + A_1 \cdot A^2$ dargestellt.

Nimmt man aus sämtlichen Werten von l das arithmetische Mittel, so ergibt sich:

$$l = \mathbf{2{,}65} \cdot 10^{-2}$$

Der mittlere Beobachtungsfehler findet sich zu $0{,}16 \cdot 10^{-2}$. Die entsprechenden Zahlen für s lauten:

$$s = \mathbf{27{,}0} \cdot 10^{-10}$$

und $0{,}6 \cdot 10^{-10}$.

III. Die Längsrichtung liegt in der Granatoedernormalen.

1) L 8,07, B 0,583, D 0,1652, T 0,572, s 29,3 · 10^{-10}, ϑ 20,0°, J 20.
beob.: 17,69, 10,94, 6,88, 4,39, 2,86.
ber.: 17,71, 10,88, 6,89, 4,42, 2,84.
m. A.: 0,45 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 2,19 · 10^{-2} l **2,17** · 10^{-2}.

2) L 8,15, B 0,586, D 0,1634, T 0,591, s 30,1 · 10^{-10}, ϑ 20,3°, J 20.
beob.: 16,66, 10,23, 6,41, 4,08, 2,59.
ber.: 16,68, 10,22, 6,42, 4,07, 2,59.
m. A.: 0,15 · 10^{-2} A_1 1,1 · 10^{-5} A 2,25 · 10^{-2} l **2,23** · 10^{-2}.

3a) L 11,17, B 0,559, D 0,1603, T 0,719, s 29,3 · 10^{-10}, ϑ 19,3°, J 20.
I. beob.: 23,89, 14,97, 9,46, 5,98, 3,84.
ber.: 23,91, 14,94, 9,45, 6,01, 3,83.
m. A.: 0,31 · 10^{-2} A_1 0,3 · 10^{-5} A 2,25 · 10^{-2} l 2,23 · 10^{-2}.
II. beob.: 19,82, 12,50, 7,91, 5,10, 3,28, 2,14.
ber.: 19,85, 12,43, 7,93, 5,10, 3,29, 2,13.
m. A.: 0,34 · 10^{-2} A_1 0,6 · 10^{-5} A 2,18 · 10^{-2} l 2,16 · 10^{-2}.
l **2,19** · 10^{-2}.

Während der Stab unverändert in seiner Fassung blieb, wurden vier Beobachtungen angestellt. I gibt das Mittel der beiden ersten, II der beiden letzten.

3b) L 11,13, B 0,559, D 0,1603, T 0,719, s 29,5 · 10^{-10}, ϑ 19.2°, J 20.
beob.: 21,89, 13,86, 9,09, 5,94, 4,00, 2,72.
ber.: 21,94, 13,80, 9,03, 6,01, 4,02. 2,70.
m. A.: 0,74 · 10^{-2} A_1 1,1 · 10^{-5} A 1,98 · 10^{-2} l **1,96** · 10^{-2}.

4) L 11,13, B 0,558, D 0,1602, T 0,717. s 29,2 · 10^{-10}, ϑ 20,0°, J 20.
beob.: 14,49, 9,18, 5,97, 3,87, 2,57.
ber.: 14,49, 9,17, 5,95, 3,89, 2,56.
m. A.: 0,37 · 10^{-2} A_1 1,4 · 10^{-5} A 2,08 · 10^{-2}. l **2,06** · 10^{-2}.

5) L 8,22, B 0,586, D 0,1644, T 0,581, s 29,4 · 10^{-10}, ϑ 19,6°, J 20.
beob.: 17,32, 10,38, 6,38, 4,10, 2,70.
ber.: 17,39, 10,24, 6,44, 4,14, 2,68.
m. A.: 1,03 · 10^{-2} A_1 2,6 · 10^{-5} A 2,14 · 10^{-2} l **2,12** · 10^{-2}.

Bis auf den auffällig kleinen Wert bei 3b zeigen die Werte gute Übereinstimmung. Bei 2 habe ich Bedenken getragen, die Resultate mitzuteilen; hinterher erwies sich der Stab nämlich als dauernd gekrümmt. Außerdem hatte er an dem einen Ende eine beträchtliche Scharte, so daß dort B nur 5,23 cm betrug. Da die Werte s und l aber vollständig mit den sonst erhaltenen Werten stimmen, habe ich die Beobachtung beibehalten.

Die beobachteten und berechneten Amplitudenreihen zeigen mehrfach Abweichungen, die bedeutend über den Beobachtungsfehlern liegen. Offenbar liegt der Grund in der zu großen Anfangsamplitude. Die benutzte Formel ist abgeleitet unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen. Spätere Beobachtungen, bei denen die Anfangsamplitude kleiner gewählt wurde, bestätigen diese Auffassung vollkommen.

Die Mittelwerte sind

$$l = \mathbf{2{,}12} \cdot 10^{-2}$$

bei einem mittleren Beobachtungsfehler von 0,10 · 10^{-2} und

$$s = \mathbf{29{,}5} \cdot 10^{-10}$$

mit 0,3 · 10^{-10}.

IV. Die Längsrichtung fällt in die Granatoederebene und bildet mit der Achse einen Winkel von 27°.

1) L 10,33, B 0,604, D 0,1596, T 0,650, s 27,6 · 10^{-10}, ϑ 18,0°, J 10.
beob.: 14,33, 11,06, 8,62, 6,72, (5,25), 4,11, 3,32, 2,63.
ber.: 14,39, 11,02, 8,56, 6,70, 5,28, 4,17, 3,30, 2,62.
m. A.: 0,75 · 10^{-2} A_1 2,2 · 10^{-5} A 2,31 · 10^{-2} l **2,29** · 10^{-2}.

Bei 2 war die Photographie mißlungen. Eine Wieder-

holung war ausgeschlossen, da der Stab bei der Drillung zerbrach.

3a) L 10.20, B 0,604. D 0,1595, T 0,648, s 27,4 · 10^{-10}, ϑ 19,3°, J 10.
beob.: 15,69, 11,99, 9,39, 7,35, 5,76, 4,54, 3,58, 2,87, 2,27.
ber.: 15,69, 12,02, 9,34, 7,32, 5,77, 4,56, 3,61, 2,86, 2,27.
m. A.: 0,46 · 10^{-2} A_1 1,9 · 10^{-5} A 2,31 · 10^{-2} l **2,29** · 10^{-2}.

3b) L 8,20, B 0,604, D 0,1595, T 0,570, s 26,7 · 10^{-10}, ϑ 20,1°, J 10.
beob.: 9,84, 7,29, 5,49, 4,15, 3,17, 2,52.
ber.: 9,88, 7,24, 5,45, 4,17, 3,22, 2,49.
m. A.: 0,97 · 10^{-2} A_1 8,5 · 10^{-5} A 2,48 · 10^{-2} l **2,47** · 10^{-2}.

4a) L 9,20, B 0,605, D 0,1584, T 0,611, s 26,8 · 10^{-10}, ϑ 19,7°, J 10.
beob.: 18,24, 13,91, 10,61, 8,27, 6,46, 5,07.
ber.: 18,27, 13,84, 10,65, 8,28, 6,47, 5,07.
m. A.: 0,31 · 10^{-2} A_1 1,5 · 10^{-5} A 2,38 · 10^{-2} l **2,37** · 10^{-2}.

4b) L 8,77, B 0,605, D 0,1584, T 0,605, s 27,4 · 10^{-10}, ϑ 18,0°, J 10.
beob.: 19,48, 14,53, 11,27, 8,77, 6,90, 5,44, 4,35.
ber.: 19,47, 14,58, 11,22, 8,76, 6,90, 5,47, 4,34.
m. A.: 0,32 · 10^{-2} A_1 2,2 · 10^{-5} A 2,25 · 10^{-2} l **2,23** · 10^{-2}.

5a) L 9,12, B 0,605, D 0,1627, T 0,587, s 27,0 · 10^{-10}, ϑ 20,0°, J 10.
beob.: 22,83, 17,37, 13,44, 10,46, 8,24, 6,46, 5,12, 4,11.
ber.: 22,88, 17,33, 13,39, 10,46, 8,23, 6,50, 5,15, 4,08.
m. A.: 0,45 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 2,30 · 10^{-2} l **2,28** · 10^{-2}.

5b) L 9,16, B 0,605, D 0,1627, T 0,596, s 27,8 · 10^{-10}, ϑ 18,2°, J 20.
beob.: 18,38, 10,46, 6,23, 3,85, 2,43.
ber.: 18,42, 10,37, 6,27, 3,88, 2,42.
m. A.: 0,70 · 10^{-2} A_1 2,6 · 10^{-5} A 2,33 · 10^{-2} l **2,32** · 10^{-2}.

Die Übereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Amplitudenreihen sowohl wie zwischen den Werten von l muß als befriedigend bezeichnet werden.

Die Mittelwerte sind:

$$l = \mathbf{2{,}32} \cdot 10^{-2}$$
$$s = \mathbf{27{,}2} \cdot 10^{-10},$$

die zugehörigen mittleren Beobachtungsfehler 0,08 · 10^{-2} bzw. 0,42 · 10^{-10}.

V. Die Längsrichtung fällt in die Oktaedernormale,

1a) L 10,55, B 0,637, D 0,1601, T 0,663, s 29,9 · 10^{-10}, ϑ 19,0°, J 20.
beob.: 10,02, 6,84, 4,72, 3,30, 2,36.
ber.: 10,04, 6,80, 4,73, 3,32, 2,35.
m. A.: 0,64 · 10^{-2} A_1 3,5 · 10^{-5} A 1,70 · 10^{-2} l **1,68** · 10^{-2},

1b) L 10,45, B 0,637, D 0,1601, T 0,665, s 30,4 · 10^{-10}, ϑ 18,7°, J 20.
beob.: 12,53, 8,69, 6,13, 4,34, 3,15, 2,31.
ber.: 12,57, 8,63, 6,11, 4,38, 3,16, 2,30.
m. A.: 0,65 · 10^{-2} A_1 2,6 · 10^{-5} A 1,59 · 10^{-2} l **1,57** · 10^{-2}.

2) L 8,10, B 0,643, D 0,1592, T 0,588, s 30,5 · 10^{-10}, ϑ 18,5°, J 20.
beob.: 11,07, 7,52, 5,25, 3,70, 2,66.
ber.: 11,09, 7,51, 5,25, 3,72, 2,66.
m. A.: 0,27 · 10^{-2} A_1 3,5 · 10^{-5} A 1,65 · 10^{-2} l **1,63** · 10^{-2}.

3) L 7,42, B 0,644, D 0,1548, T 0,590, s 30,8 · 10^{-10}, ϑ 17,7°, J 20.
beob.: 10,19, 6,93, 4,77, 3,32, 2,42.
ber.: 10,22, 6,87, 4,78, 3,37, 2,40.
m. A.: 1,00 · 10^{-2} A_1 4,4 · 10^{-5} A 1,67 · 10^{-4} l **1,65** · 10^{-2}.

Beobachtete und berechnete Amplitudenreihen stimmen meist befriedigend überein. Der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Werte von l beträgt ungefähr 7 % des letzteren. Bildet man aus den gefundenen Zahlen das Mittel, so erhält man

$$l = \mathbf{1{,}63} \cdot 10^{-2}$$

mit einem mittleren Beobachtungsfehler von 0,05 · 10^{-2}.

Weil dieses Mittel an Stäben des gleichen Kristalles erhalten ist, scheint es mir nicht ganz ohne Interesse. Ich werde später noch darauf zurückkommen.

Von den neu hergestellten Stäben (s. S. 14—17) wurden 5, 6 und 8 auf Biegung untersucht.

5) L 7,20, B 0,498, D 0,1528. T 0,684, s 31,8 · 10^{-10}, ϑ 27,0°, J 10.
beob.: 11,61, 9,42, 7,65, 6,25, 5,08, 4,19, 3,44, 2,84, 2,32, 1,98.
ber.: 11,67, 9,38, 7,61, 6,21, 5,10, 4,20, 3,46, 2,85, 2,36, 1,95.
m. A.: 0,74 · 10^{-2} A_1 2,7 · 10^{-5} A 1,89 · 10^{-2} l **1,88** · 10^{-2}.

6) L 7,55, B 0,492, D 0,1511, T 0,706, s 30,8 · 10 $^{-10}$, ϑ 27,4°, J 10.
beob.: 7,82, 6,10, 4,77, 3,76, 2,99, 2,46 (2,01).
ber.: 7,86, 6,03, 4,73, 3,78, 3,04, 2,46, 2,00.
m. A.: $0{,}96 \cdot 10^{-2}$ A_1 $13{,}3 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}02 \cdot 10^{-2}$ l **2,00** · 10^{-2}.

8) L 7,35, B 0,480, D 0,1511, T 0,700, s $30{,}4 \cdot 10^{-10}$, ϑ 27,0°, J 10.
beob.: 9,50, 7,67, 6,24, 5,11, 4,17, 3,44, 2,86, 2,31.
ber.: 9,49, 7,67, 6,25, 5,11, 4,19, 3,44, 2,83, 2,33.
m. A.: $0{,}51 \cdot 10^{-2}$, A_1 $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ A $1{,}93 \cdot 10^{-2}$ l **1,91** · 10^{-2}.

Diese Beobachtungen geben als Mittel

$$l = \mathbf{1{,}93} \cdot 10^{-2}$$

bei einem mittleren Beobachtungsfehler von $0{,}06 \cdot 10^{-2}$. Der Wert ist also 18% größer als der aus den älteren Stäben erhaltene. Wieweit hierbei Temperatureinflüsse im Spiele sind, läßt sich nachträglich schwer entscheiden. Auf Grund der ganz ähnlichen Verhältnisse bei der Drillung bin ich aber nach genauer Prüfung zu der Annahme gekommen, daß hier ebenso wie bei I infolge der hohen Temperatur Kitterweichungen eingetreten sind, die die Resultate beträchtlich gestört haben. Bei den Drillungsbeobachtungen ist das im einzelnen näher ausgeführt. Ich werde daher dieses zweite Resultat wie das von I bei der Zusammenfassung als unsicher fortlassen.

Der elastische Mittelwert ist gegeben durch

$$s = \mathbf{30{,}6} \cdot 10^{-10}$$

bei einem mittleren Beobachtungsfehler von $0{,}6 \cdot 10^{-10}$.

VI. Die Längsrichtung liegt in der Granatoedernormalen. Für die Biegung stimmt die Sorte mit III überein.

1) L 9,85, B 0,623, D 0,1578, T 0,651, s $29{,}0 \cdot 10^{-10}$, ϑ 18,2°, J 10.
beob.: 14,20, 11,27, 8,88, 7,05, 5,64, 4,48, 3,61.
ber.: 14,23, 11,22, 8,89, 7,07, 5,64, 4,50, 3,59.
m. A.: $0{,}34 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}23 \cdot 10^{-2}$ l **2,21** · 10^{-2}.

2a) L 9,65, B 0,624, D 0,1582, T 0,646, s $29{,}4 \cdot 10^{-10}$, ϑ 17,0°, J 10.
beob.: 15,09, 12,05, 9.65, 7,79, 6,24, 5,07, 4,08, 3,26, 2,66.
ber.: 15,08, 12,05, 9,67, 7,77, 6,26, 5,05, 4,07, 3,29, 2,64.
m. A.: $0{,}50 \cdot 10^{-2}$ A_1 $0{,}6 \cdot 10^{-5}$ A $2{,}14 \cdot 10^{-2}$ l **2,12** · 10^{-2}.

2b) L 9,85, B 0,624, D 0,1582, T 0,643, s 28,5 · 10^{-10}, ϑ 18,8°, J 10.
beob.: 13,04, 10,41, 8,38, 6,75, 5,45, 4,45, 3,62, 2,92, 2,40.
ber.: 13,05, 10,40, 8,36, 6,75, 5,47, 4,44, 3,61, 2,94, 2,40.
m. A.: 0,27 · 10^{-2} A_1 1,6 · 10^{-5} A 2,04 · 10^{-2} l **2,03** · 10^{-2}.

3a) L 9,78, B 0,622, D 0,1591, T 0,635, s 28,4 · 10^{-10}, ϑ 17,4°, J 10.
beob.: 12,76, 9,98, 7,76, 6,15, 4,83, 3,81, 3,00, 2,42, 1,94.
ber.: 12,82, 9,92, 7,76, 6,11, 4,83, 3,83, 3,04, 2,42, 1,92.
m. A.: 0,61 · 10^{-2} A_1 2,2 · 10^{-5} A 2,28 · 10^{-2} l **2,26** · 10^{-2}.

3b) L 9,65, B 0,622, D 0,1591, T 0,646, s 29,8 · 10^{-10}, ϑ 18,0°, J 10.
beob.: 18,60, 14,64, 11,53, 9,13, 7,28, 5,84, 4,69, 3,78, 3,00.
ber.: 18,63, 14,58, 11,52, 9,16, 7,30, 5,84, 4,68, 3,75, 3,01.
m. A.: 0,36 · 10^{-2} A_1 1,0 · 10^{-5} A 2,19 · 10^{-2} l **2,17** · 10^{-2}.

Die Gesamtmittel sind

$$l = \mathbf{2{,}16} \cdot 10^{-2}$$
$$s = \mathbf{29{,}0} \cdot 10^{-10},$$

die mittleren Beobachtungsfehler 0,09 · 10^{-2} und 0,6 · 10^{-10}.

Auf die Werte von s_{33} wenden wir jetzt die Formel (45) von Seite 24 an. Dabei legen wir jeder der beobachteten Zahlen das Gewicht bei, welches der Zahl der dazu benutzten Beobachtungen entspricht. Mit den gefundenen Werten berechnen wir die Reihe der s_{33} noch einmal.

Wir finden so

beob.: 24,4, 27,0, 29,5, 27,2, 30,6, 29,0.
ber.: 24,4, 26,8, 29,1, 27,7, 30,7, 29,1.

$$s_{11} = \mathbf{24{,}4}, \quad 2\,[(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}\, s_{44}] = -\mathbf{18{,}8}.$$

Die Unterschiede liegen vollständig innerhalb der mittleren Beobachtungsfehler. Die bezüglichen statisch bestimmten Zahlen sind

$$s_{11} = 23{,}82, \quad 2\,[(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}\, s_{44}] = 19{,}33,$$
$$23{,}82,\ 26{,}23,\ 28{,}65,\ 27{,}18,\ 30{,}26,\ 28{,}65.$$

Die aus den Schwingungsbeobachtungen berechneten Werte sind also durchschnittlich um 0,5 · 10^{-10} größer als die statisch bestimmten.

Weiter muß nach Gleichung (53)

$$l' \cdot s'_{33} = A + B\,(\gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2)$$

sein. Um die Formel anzuwenden, wähle ich für s'_{33} die be-

rechneten Werte. Bei den l beschränke ich mich auf die Beobachtungen an älterem Material. Dann führe ich die Rechnung in der gleichen Weise wie bei den Elastizitätsmoduln durch und finde

	I	II	III	IV	V	VI
beob.:	85,1,	70,8,	61,8,	64,2,	50,1,	62,8.
ber.:	79,5,	70,2,	61,0,	66,6,	54,8,	61,0.
Diff.:	5,6,	0,6,	0,8,	2,4,	4,7,	1,8.
m. Bf.:	7,0,	4,3,	2.8,	2,1,	1,5,	2,6.

$$A = \mathbf{79{,}5} \cdot 10^{-12}. \quad B = -\mathbf{74{,}1} \cdot 10^{-12}.$$

Was hier als mittlerer Beobachtungsfehler angegeben ist, ist die früher für l gefundene Zahl multipliziert mit dem zugehörigen $s'_{33} \cdot 10^{12}$. Abgesehen von Sorte V liegen die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werten im Bereich der Beobachtungsfehler. Es wird vielleicht angebracht sein, zu obigen Werten noch einmal die zugehörigen $l \cdot 10^2$ anzugeben. Man findet so

	I	II	III	IV	V	VI
beob:	3,49,	2,65,	2,12,	2,32	1,63,	2,16.
ber.:	3,26,	2,62,	2,09,	2,41,	1,79,	2,09.

Mir scheint, als wären damit für das ältere Material und eine Temperatur von etwa 19° Werte für l gefunden, die der Wahrheit ziemlich nahe kommen. Wesentlich höher liegen die Werte, die man an den Stäben der zweiten Lieferung (I_3, I_5, V_5, V_6, V_8) erhält. Weil davon nur zwei verschiedene Orientierungen bei 27—29°, also bei abnorm hoher Temperatur, bei der möglicherweise die Kittmasse schon durch Erweichen störend auf die Resultate eingewirkt hat, untersucht sind, haben die dabei erhaltenen Zahlen natürlich nur geringe Sicherheit.

Ich teile die Werte so mit, wie man sie durch Berechnen aus denen für I und V erhält:

	I	II	III	IV	V	VI
$l' \cdot s'_{33} \cdot 10^{12}$	98,2,	83,5,	68,8,	77,8,	59,1,	68,8.
$l' \cdot 10^2$	4,03,	3,12,	2,36,	2,81,	1,93,	2,36.

$$A = 98{,}2 \cdot 10^{-12} \quad B = -117{,}5 \cdot 10^{-12}.$$

Theoretische Bemerkungen zu den Drillungsbeobachtungen.

Auf dem bei den Biegungsbeobachtungen eingeschlagenen Wege erhält man bei der Drillung eine strenge Lösung nur für den Zylinder mit elliptischem Querschnitt, die sich für praktische Messungen kaum verwerten läßt. Sie ist bequem für die Diskussion der Abhängigkeit der Drillungsmoduln von der Orientierung der Stabachsen. Genau wie bei der Biegung folgt, daß bei konstanten l' der Wert $l' \cdot s'_{55}$ die Symmetrie von s'_{55} haben müßte. Für diese gilt aber im regulären System

$$(64)\quad s'_{55} = s_{44} + 4\,[(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2} s_{44}]\,(\alpha_1^2\gamma_1^2 + \alpha_2^2\gamma_2^2 + \alpha_3^2\gamma_3^2).$$

Ich möchte wenigstens den Weg angeben, auf dem die Formel erhalten wird, nach der im Folgenden s'_{55} berechnet ist. Man genügt den Hauptgleichungen (21) ganz allgemein durch die Verfügung [1])

$$(65)\quad \begin{gathered} X_x = -\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2},\ X_y = Y_x = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x\,\partial y},\ Y_y = -\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2}, \\ Y_z = \frac{\partial \Omega}{\partial x},\ Z_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{gathered}$$

wobei Ω_1 und Ω Funktionen von x und y sind. Die Grenzbedingungen haben nach einmaliger Integration die Form

$$(66)\quad \overline{\frac{\partial \Omega_1}{\partial y}} = 0,\ \overline{\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}} = 0,\ \overline{\Omega} = 0.$$

Führt man jetzt die Werte (25) von u, v, w in die Gleichungen (20) ein, eliminiert zunächst Z_z und darauf U, V, W, so bleiben zwei Differentialgleichungen 4. bzw. 3. Ordnung für Ω_1 und Ω. Um die zweite dieser Gleichungen homogen zu machen, setzen wir

$$(67)\quad \Omega = \frac{n^2}{S_{55}}(2h\,s_{33} - g_1\,s_{43} + g_2\,s_{53})\left(\omega - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y^2}{n^2} - 1\right)\right),$$

wobei $x = \pm m$, $y = \pm n$ die Begrenzungen des Querschnittes sind. S_{55} ist eine Abkürzung für $s_{55} \cdot s_{33} - s_{53}^2$. Alle übrigen

[1]) Kristallphysik, S. 642 ff.

Bezeichnungen sind die gleichen wie früher. Für ω gelten die Randbedingungen

(68) für $x = \pm m$ und beliebiges y: $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{n^2} - 1\right)$

„ $y = \pm n$ „ „ $x : \omega = 0$

Das wirkende Drehungsmoment N bestimmt sich zu

$$N = -\int\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) dq = +2\int \Omega\, dq \tag{69}$$

In den früheren Bezeichnungen ist

$$2\, g_1\, Q\, k_1^{\,2} = s_{34}\, N,\ 2\, g_2\, Q\, k_2^{\,2} = -\, s_{35}\, N. \tag{70}$$

Benutzt man diese Werte für g_1 und g_2, beachtet, daß für den bezeichneten rechteckigen Querschnitt

$$k_1^{\,2} = \tfrac{1}{3}\, m^2,\ k_2^{\,2} = \tfrac{1}{3}\, n^2, \tag{71}$$

und setzt dann den Wert für Ω aus (67) in (69) ein, so erhält man

$$N\, S_{55} = n^2\left[4\, h\, s_{33} - 3\left(\frac{s_{43}^{\,2}}{m^2} + \frac{s_{53}^{\,2}}{n^2}\right)\frac{N}{Q}\right]\left(\int \omega\, dq + \tfrac{1}{3}\, Q\right) \tag{72}$$

und damit für die spezifische Drillung des Prismas

$$h = \frac{3\, N\left[\frac{s_{55}\, s_{33}}{n^2} + \frac{s_{43}^{\,2}}{m^2} + \left(\frac{s_{43}^{\,2}}{m^2} + \frac{s_{53}^{\,2}}{n^2}\right) 3\int \frac{\omega\, dq}{Q}\right]}{4\, s_{33}\,(Q + 3\int \omega\, dq)} \tag{73}$$

Hierin ist ω noch unbekannt. Führen wir die Transformation

$$x' = \frac{x}{n},\ y' = \frac{y}{n},\ \Omega'_1 = n\, \Omega_1,\ \omega' = \omega \tag{74}$$

durch, so behalten die Differentialgleichungen für Ω'_1 und ω' die ursprüngliche Gestalt. Das Gleiche gilt von den Grenzbedingungen für Ω'_1. Dagegen genügt ω' der Randbedingung

(75) für $x' = \pm\frac{m}{n}$ und beliebiges $y' : \omega' = \frac{1}{2}(y'^{\,2} - 1)$

für $y' = \pm 1$ „ „ $x' : \omega' = 0.$

Hieraus folgt, daß $n\, \Omega_1$ und ω die Dimensionen m und n

nur in den Quotienten $\frac{n}{m}$ oder $\frac{m}{n}$ enthalten können, denn dieselben kommen in den Bedingungen nur in dieser Verbindung vor. Gleiches gilt somit auch von

$$\int_{-\frac{m}{n}}^{+\frac{m}{n}} \int_{-1}^{+1} \omega' \, dx' \, dy' = \frac{1}{n^2} \int \omega \, dq, \tag{76}$$

d. h., wenn man setzt

$$\int \omega \, dq = \frac{4n^2}{3} f, \tag{77}$$

so ist f hierin nur noch eine Funktion von $\frac{n}{m}$. Setzt man

$$\begin{aligned} 2m &= B \text{ als die größere,} \\ 2n &= D \text{ als die kleinere} \end{aligned} \tag{78}$$

Querdimension des Prismas fest und führt die Gesamtdrillung

$$\bar{n} = h \cdot l \tag{79}$$

des Prismas ein, so findet man schließlich

$$\bar{n} = \frac{3 N l \left[s_{55} + \frac{D^2 s_{43}^{\,2}}{B^2 s_{33}} + \left(\frac{s_{43}^{\,2}}{B^2} + \frac{s_{53}^{\,2}}{D^2} \right) \frac{D^3 f}{B s_{33}} \right]}{D^3 B \left(1 + \frac{Df}{B} \right)} \tag{80}$$

Für quasi-isotrope Körper ist f bekannt und für Werte $\frac{B}{D} > 3$ als konstant ($= -0{,}630$) anzusehen. Das Gleiche ist für kristallinische Prismen von beliebiger Orientierung wahrscheinlich. Hat man den konstanten Wert von f ermittelt, so läßt sich nach Formel (80), sofern nur s_{33}, s_{43} und s_{53} in roher Annäherung bekannt sind, s_{55} berechnen.

Die Formeln vereinfachen sich noch bedeutend, wenn zwei Prismenkanten in elastische Symmetrieachsen fallen. Es wird dann

$$\int \frac{\omega \, dq}{Q} = \frac{n}{3m} \sqrt{\frac{s_{44}}{s_{55}}} f\left(\frac{n}{m} \sqrt{\frac{s_{44}}{s_{55}}} \right) \tag{81}$$

und

$$\bar{n} = \frac{3Nl s_{55}}{D^3 B\left(1 + \frac{D}{B}\sqrt{\frac{s_{44}}{s_{55}}}\, f\right)}, \quad f = -0{,}630. \tag{82}$$

Eine entsprechende, aber komplizierter und nur in Annäherung abzuleitende Vereinfachung tritt ein, wenn die Prismenachse in einer zweizähligen Symmetrieachse liegt. Es wird dann f annähernd durch folgende Gleichung dargestellt:

$$f = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s_{44}}{s_{55}}}. \tag{83}$$

Dabei fällt $\frac{2}{\pi} = 0{,}637$ für die praktische Rechnung vollständig mit 0,630 zusammen.

Für die Orientierungen I, III, V und VI wird

$$s'_{43} = s'_{53} = 0,$$

so daß für diese nach (80) streng gilt

$$\bar{n} = \frac{3Nl s_{55}}{D^3 B\left(1 + \frac{D}{B} f\right)}, \tag{84}$$

oder auf das Schwingungsproblem übertragen

$$s'_{55} = -\frac{BD^3 T^2\left(1 + \frac{D}{B} f\right)}{12\pi^2 ML} \tag{85}$$

wenn M das bewegte Trägheitsmoment, T die Dauer einer Doppelschwingung ist.

Bei II und IV ist nur $s'_{52} = 0$.

Damit hat man für diese Sorten:

$$s'_{55} = \left(\frac{BD^2F^2}{12\pi^2 ML} - \frac{D^2}{B^2}\frac{s'^2_{43}}{s'_{33}}\right)\left(1 + \frac{D}{B} f\right) \tag{86}$$

Nimmt man für s'_{43} und s'_{33} als Näherungswerte die statisch bestimmten Zahlen, so zeigt die Rechnung, daß das zweite Glied der ersten Klammer höchstens 1 ‰ des ersten ausmacht, bei

der sonstigen Unsicherheit der Beobachtungen also unbedenklich vernachlässigt werden kann. Streng genommen hätte f als Unbekannte in den Rechnungen geführt und mit s'_{55} zusammen bestimmt werden müssen. Dazu schienen mir die Beobachtungsfehler zu groß. Ich habe überall $f = -0{,}630$ gesetzt und dann s'_{55} nach Formel (85) berechnet.

Da die Zulässigkeit dieses Rechnungsverfahrens bei II und IV nur wahrscheinlich (nicht erwiesen) ist, wurden die dort gefundenen Werte bei der zusammenfassenden Rechnung nicht benutzt, sondern nur angeführt.

Die Beobachtung der Drillungsschwingungen.

Der Grundgedanke der Beobachtungsmethode ist genau der gleiche wie bei der Biegung. Der Messingbügel a (Fig. 2) trägt bei m den Hohlspiegel, bei l ein Gegengewicht dazu. Auf diesen Spiegel fällt wieder das Licht des Induktionsfunkens. Nur ist letzterer um 90^0 gedreht, so daß jetzt die Breite (die größere Dimension des Funkens!) senkrecht zur Schwingungsrichtung liegt. Das Funkenbild fällt wieder auf die rotierende Trommel (deren Achse jetzt wagerecht liegt) und zeichnet dort auf dem Film eine Sinuslinie mit abnehmender Amplitude. An dieser Sinuslinie werden wieder die eigentlichen Messungen angestellt.

Die wesentlichste Schwierigkeit der Methode liegt in der Herstellung wirklich reiner Drillungsschwingungen. Kleine Ungenauigkeiten in der Zentrierung bewirken, daß sich über die gewünschte Drillungsschwingung eine Biegungsschwingung überlagert. Dieser Fehler ergibt in der Photographie Schwebungen, die ein einigermaßen zuverlässiges Auswerten der Photographie unmöglich machen. Um reine Drillungsschwingungen zu erzielen, ist es nötig, daß die Achse des Stäbchens genau in die Symmetrieachse des schwingenden Systems fällt. Um das möglichst genau zu erreichen, ist folgende Einrichtung zum Einkitten der Stäbe in die Fassung getroffen: Ein Messingbügel trägt am untern Ende eine kreisförmige Öffnung, in der sich die Schraube der untern Fassung eben drehen kann. In etwa 12 cm Höhe über dieser Öffnung trägt der Bügel eine Schraube,

deren Spitze sich in der Mittellinie der Öffnung bewegt. Diese Spitze faßt in eine Grube am obern Ende der Kugelfassung. In diesen Apparat wird der Stab mit den Fassungen während des Einkittens eingespannt und gedreht. Meist erfüllt die Einrichtung ihren Zweck recht gut. Schwierigkeiten, die mehrfach auftraten, fanden ihre Erklärung in Fehlern der Fassungen. Es zeigte sich verschiedentlich, daß der Schlitz für den Stab nicht genau senkrecht eingeschnitten war; dabei war die Abweichung aber so gering, daß sie erst infolge der Länge des Stäbchens erkennbar wurde.

Recht schwierig gestaltet sich das Festklemmen der obern Fassung zwischen den Kupferbacken. Damit dabei keine Verschiebung des Stäbchens und der Scheibe aus ihrer Lage erfolgt, ist ganz gleichmäßiges Anziehen beider Schrauben nötig. Jede kleine Ungenauigkeit an dieser Stelle äußert sich wegen der Länge des Stäbchens in einer beträchtlichen Lageänderung der Scheibe und damit in Pendelschwingungen.

Für das Einkitten und den Einfluß der Fassungen und des Kittmaterials gilt genau das gleiche wie bei den Biegungsschwingungen.

Das Trägheitsmoment der Torsionsscheibe war von Herrn Voigt[1]) zu

$$M_m = 31\,860 \text{ cm}^2\text{g}$$

bestimmt. Die Scheibe S trägt einen Verstärkungsring R, der bei einem Teil der Versuche abgeschraubt war. Der Durchmesser des Ringes beträgt 9,55 bzw. 12,45 cm, sein Gewicht 323,6 g. Demnach hat der Ring ein Trägheitsmoment von 9958 cm^2g und das System ohne Verstärkungsring ein solches von

$$M_o = 21\,902 \text{ cm}^2\text{g}$$

Wie bei den Biegungsbeobachtungen wurde für das beobachtete Dekrement λ gesetzt:

$$\lambda = A + A_1 A^2 \tag{87}$$

Die Übereinstimmung der Formel mit der Beobachtung ist auch hier ziemlich befriedigend. Aus dem Werte A wurde der

[1]) Göttinger Abhandlungen Bd. 38 § 4.

Anteil l, der auf der Wirkung des Stabes allein beruht, nach der Formel

$$l = A - \frac{A_0 T}{T_0} \tag{88}$$

berechnet. Dabei wurde für den Apparat mit und ohne Verstärkungsring

$$\frac{A_0}{T_0} = 0{,}000154 \tag{89}$$

gesetzt, entsprechend den früheren Beobachtungen von Herrn Voigt.

Resultate der Drillungsbeobachtungen.

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie bei den Biegungsbeobachtungen. 1 mm auf der Photographie, also eine Einheit der angegebenen Amplitudenwerte, entspricht einer Verdrillung des Querschnittes um 3,6′. Die spezifische Drillung des Stabes ist also bei derselben Amplitude bei kürzeren Stäben größer als bei längeren.

Bei jeder Beobachtung ist angegeben, ob sie mit oder ohne Verstärkungsring erfolgte (m. R., o. R.). Durch Abnehmen des Verstärkungsringes läßt sich die Schwingungszeit für denselben Stab ändern, ohne daß an den Dimensionen oder an den Fassungen Änderungen vorgenommen werden. Derartige Versuche ergaben einwandfrei, daß die Schwingungszeit ohne Einfluß auf die Dämpfung ist. Dagegen fand sich das logarithmische Dekrement der Länge des Stabes umgekehrt proportional, also direkt proportional der spezifischen Drillung des Stabes. Ein Einfluß von Breite und Dicke ließ sich nicht nachweisen.

Bei den Drillungsbeobachtungen wurde noch festgestellt, ob im Laufe der Zeit etwa eine Akkommodation stattfand. Der Stab wurde in Drillungsschwingungen versetzt und dann sich selbst überlassen. Dieser Versuch wurde 20 mal wiederholt, ohne daß sonst die geringste Änderung in der Versuchsanordnung vorgenommen wurde. Die 5., 10., 15. und 20. Schwingung wurden photographiert. Die 20 Schwingungen dauerten insgesamt etwa zwei Stunden. Während der Zeit schwankte die

Temperatur höchstens um 0,4°. Ich gebe die erhaltenen Resultate für I 3a ($J = 30$):

5) beob.: 9,50 8,05 6,90 5,99 5,17 4,50 3,93 3,46 3,03 2,68 2,35
ber.: 9,50 8,05 6,90 5,96 5,17 4,51 3,94 3,46 3,04 2,67 2,35
m. A.: $0{,}26 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ A $\mathbf{4{,}14} \cdot 10^{-3}$

10) beob.: 9,85 8,38 7,20 6,22 5,39 4,72 4,10 3,57 3,15 2,78 2,44
ber.: 9,86 8,38 7,19 6,21 5,39 4,70 4,11 3,60 3,16 2,77 2,44
m. A.: $0{,}33 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ A $\mathbf{4{,}20} \cdot 10^{-3}$

15) beob.: 9,82 8,41 7,22 6,21 5,42 4,75 4,15 3,63 3,21 2,82 2,49
ber.: 9,85 8,38 7,20 6,23 5,42 4,74 4,15 3,64 3,20 2,82 2,49
m. A.: $0{,}27 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ A $\mathbf{4{,}10} \cdot 10^{-3}$

20) beob.: 9,63 8,21 7,12 6,13 5,34 4,69 4,05 3,55 3,14 2,75 2,44
ber.: 9,64 8,23 7,08 6,13 5,34 4,66 4,08 3,57 3,14 2,76 2,43
m. A.: $0{,}46 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ A $\mathbf{4{,}18} \cdot 10^{-3}$

Die Werte von A sind also keineswegs genau gleich. In einzelnen Fällen sind die Abweichungen zwischen den einzelnen Werten für A noch größer. Nirgends aber läßt sich ein fortgesetztes Ansteigen oder Fallen der Dämpfung bei längerer Beanspruchung des Stabes erkennen.

Weichen schon die Beobachtungen an dem gleichen Stabe in ihren Resultaten beträchtlich voneinander ab, so wird die Unsicherheit noch größer, wenn man sämtliche Stäbe der gleichen Sorte berücksichtigt. Trotz vielfacher Wiederholung der Versuche ist es mir bei der Drillung nicht gelungen, für jede Orientierung wirklich befriedigende Übereinstimmung der Resultate zu erzielen.

I. Länge und Breite in der Würfelnormalen.

1) o. R.

L 5,75, B 0,501, D 0,1628, T 0,270, s $82{,}4 \cdot 10^{-10}$ ϑ 20,9°, J 30.
beob.: 9,15, 7,36, 6,04, 4,92, 4,06, 3,39, 2,82.
ber.: 9,16, 7,36, 6,00, 4,93, 4,08, 3,38, 2,81.
m. A.: $0{,}36 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ A $5{,}95 \cdot 10^{-3}$ l $5{,}90 \cdot 10^{-3}$
$l \cdot L$ $\mathbf{3{,}39} \cdot 10^{-2}$.

3a) m. R.

L 8,13, B 0,503, D 0,1525, T 0,414, s 79,1 · 10^{-10}, ϑ 19,9°, J 30.
beob.: 9,70 8,26 7,11 6,14 5,33 4,66 4,06 3,55 3,13 2,76 2,43
ber.: 9,71 8,26 7,09 6,13 5,33 4,65 4,07 3,57 3,13 2,75 2,43
m. A.: 0,23 · 10^{-2} A_1 1,6 · 10^{-5} A 4,16 · 10^{-3} l 4,09 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,33** · 10^{-2}.

3b) o. R.

L 7,67, B 0,503, D 0,1525, T 0,333, s 78,9 · 10^{-10}, ϑ 20,0°, J 30.
beob.: 8,60, 7,36, 6,39, 5,57, 4,86, 4,25, 3,77, 3,31, 2,93.
ber.: 8,60, 7,37, 6,38, 5,56, 4,86, 4,27, 3,76, 3,32, 2,93.
m. A.: 0,10 · 10^{-2} A_1 1,8 · 10^{-5} A 3,96 · 10^{-3} l 3,91 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,00** · 10^{-2}.

3c) m. R.

L 7,67, B 0,503, D 0,1525, T 0,403, s 79,4 · 10^{-10}, ϑ 20,6°, J 30.
beob.: 8,72, 7,48, 6,44, 5,61, 4,87, 4,24, 3,73, 3,29, 2,87.
ber.: 8,73, 7,47, 6,44, 5,59, 4,87, 4,26, 3,73, 3,27, 2,88.
m. A.: 0,12 · 10^{-2} A_1 1,6 · 10^{-5} A 4,16 · 10^{-3} l 4,10 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,14** · 10^{-2}.

4a) m. R.

L 8,93, B 0,444, D 0,1489, T 0,486, s 79,5 · 10^{-10}, ϑ 20,8°, J 50.
beob.: 9,35, 7,74, 6,42, 5,38, 4,51, 3,81, 3,18, 2,68, 2,27.
ber.: 9,36, 7,73, 6,43, 5,37, 4,51, 3,79, 3,19, 2,69, 2,27.
m. A.: 0,18 · 10^{-2} A_1 0,6 · 10^{-5} A 3,37 · 10^{-3} l 3,29 · 10^{-4}
$l \cdot L$ **2,94** · 10^{-2}.

4b) o. R.

L 8,93, B 0,444, D 0,1489, T 0,403, s 79,5 · 10^{-10}, ϑ 20,7°, J 50.
beob.: 9,35, 7,54, 6,19, 5,07, 4,17, 3,45, 2,89, 2,43.
ber.: 9,37, 7,54, 6,15, 5,06, 4,19, 3,48, 2,90, 2,42.
m. A.: 0,48 · 10^{-2} A_1 1,1 · 10^{-5} A 3,55 · 10^{-3} l 3,48 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,11** · 10^{-2}.

5a) m. R.

L 9,05, B 0,505, D 0,1475, T 0,457, s 79,4 · 10^{-10}, ϑ 20,4°, J 50.
beob.: 9,84, 7,78, 6,23, 5,07, 4,14, 3,44, 2,84.
ber.: 9,86, 7,76, 6,23, 5,07, 4,16, 3,43, 2,84.
m. A.: 0,28 · 10^{-2} A_1 1,5 · 10^{-5} A 3,64 · 10^{-3} l 3,57 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,23** · 10^{-2}.

5 b) o. R.
L 6,83, B 0,505, D 0,1475, T 0,329, s 79,3 · 10^{-10}, ϑ 21,9°, J 40.
beob.: 9,59, 7,49, 5,94, 4,76, 3,84, 3,14, 2,58.
ber.: 9,61, 7,47, 5,93, 4,76, 3,86, 3,14, 2,57.
m. A.: 0,29 · 10^{-2} A_1 1,9 · 10^{-5} A 4,91 · 10^{-3} l 4,86 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,32** · 10^{-2}.

5 c) o. R.
L 6,75, B 0,505, D 0,1475, T 0,331, s 79,5 · 10^{-10}, ϑ 16,3°, J 40.
beob.: 9,65, 7,51, 5,93, 4,74, 3,84, (3,12,) 2,57.
ber.: 9,67, 7,47, 5,92, 4,75, 3,85, 3,13, 2,56.
m. A.: 0,15 · 10^{-2} A_1 2,1 · 10^{-5} A 5,01 · 10^{-3} l 4,96 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,34** · 10^{-2}.

9 a) m. R.
L 7,20, B 0,480, D 0,1517, T 0,405, s 81,0 · 10^{-10}, ϑ 16,8°, J 40.
beob.: 12,08, 9,47, 7,50, 6,08, 5,01, 4,05, 3,33.
ber.: 12,08, 9,44, 7,54, 6,10, 4,96, 4,06, 3,33.
m. A.: 0,22 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 4,77 · 10^{-3} l 4,70 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,39** · 10^{-2}.

9 b) o. R.
L 7,20, B 0,480, D 0,1517, T 0,335, s 80,7 · 10^{-10}, ϑ 16,3°, J 40.
beob.: 12,09, 9,73, 7,89, 6,56, 5,33, 4,44.
ber.: 12,15, 9,79, 7,97, 6,54, 5,40, 4,46.
m. A.: 0,36 · 10^{-2} A_1 0,7 · 10^{-5} A 4,57 · 10^{-3} l 4,52 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,26** · 10^{-2}.

Von einzelnen Ausnahmen abgesehen, lassen sich die beobachteten Amplituden also ganz gut durch die früher bei der Biegung angegebene Formel darstellen.

Von Beobachtungen an älterem Material war nur eine an 1 brauchbar. Der Wert $l \cdot L$ liegt den bei den Stäben 3, 4 und 5 der zweiten Lieferung erhaltenen Werten recht nahe.

Die Stäbe 6, 7 und 8 ergaben Werte $l \cdot L$ resp. $= 4{,}03$, 4,14 und 4,05, die gänzlich aus der Reihe der übrigen herausfallen. Da diese Stäbe der dritten Lieferung entstammen und die mit ihnen erhaltenen Resultate doch unter sich ganz gut stimmen, da ich anderseits beim Verpassen der Fassungen sehr sorgfältig vorgegangen war, war ich anfangs geneigt, die Abweichung durch das andere Material zu erklären. Die Beob-

achtung an einem vierten Stabe (9) des gleichen Materials bei niedrigerer Temperatur (die drei andern waren zerbrochen) ergab jedoch unzweifelhaft, daß das Material keine Schuld trifft, sondern nur die ausnahmsweise hohe Temperatur, unter der die bezüglichen Messungen stattgefunden haben. Da Beobachtungen von Stäben anderer Orientierung bei gleich hoher Temperatur keine Abweichungen von dieser Größenordnung zeigen, so bleibt zur Erklärung nur das Verhalten der Kittmasse. Bei höherer Temperatur kann der Kitt offenbar durch Erweichen Störungen des Resultats ergeben, wenn er in etwas zu dicker Schicht vorhanden ist. Diese Störungen werden sich nicht zeigen, wenn das beabsichtigte Verpassen von Stab und Fassung wirklich tadellos geglückt ist. Jedenfalls lassen die hier vorhandenen Abweichungen ein starkes Mißtrauen gegen alle Beobachtungen bei abnorm hoher Temperatur als berechtigt erscheinen. Im folgenden sollen beim Feststellen der Durchschnittswerte Beobachtungen bei Temperaturen um 30 ° herum (Zwischenwerte zwischen 20 ° und 30 ° fehlen) stets nur mit dem halben Gewicht der andern geführt werden.

Systematische Beobachtungen bei verschiedener Temperatur und derselben Kittung hätten sich bei der vorhandenen Versuchsanordnung kaum durchführen lassen, einmal, weil der ganze Beobachtungsraum auf diese Temperatur hätte gebracht werden müssen, ferner weil dabei auch die Änderung der innern Reibung im Steinsalz selbst zur Geltung gekommen wäre, und schließlich, weil es recht erhebliche Schwierigkeiten bereitete, eine Reihe von Stäben durch viele Beobachtungen wirklich ungefährdet hindurchzubringen. Kleine Verkürzungen der Stäbe traten recht oft bei Wiederholung der Versuche ein, während sich einwandfreie Vergleiche doch nur bei vollkommen ungeänderten Dimensionen der Stäbe durchführen lassen. So war die oben bezeichnete Auswertung der erzielten Resultate mehr oder weniger durch die Schwierigkeiten des Materials und der Beobachtung geboten.

Führt man die Mittelwertbildung in der angegebenen Weise durch, so erhält man

$$l \cdot L = 3{,}33 \cdot 10^{-2}$$

bei einer mittleren Abweichung von $0{,}32 \cdot 10^{-2}$, während sich

$$s = \mathbf{80{,}1} \cdot 10^{-10}$$

bei einer Abweichung von $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ ergibt.

II. Die Längsrichtung liegt in der Würfelebene unter $22\,^1/_2{}^0$ gegen die Achse, die Breite senkrecht zu dieser Ebene.

1) m. R.

L 5,52, B 0,488, D 0,1608, T 0,329, s 81,8 · 10^{-10}, ϑ 16,2°, J 30.
beob.: 8,96, 6,45, 4,78, 3,62, 2,81, 2,18.
ber.: 8,98, 6,42, 4,78, 3,64, 2,81, 2,18.
m. A.: 0,36 · 10^{-2} A_1 4,1 · 10^{-5} A 8,14 · 10^{-3} l 8,09 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,47** · 10^{-2}.

2a) m. R.

L 9,48, B 0,488, D 0,1613, T 0,430, s 82,2 · 10^{-10}, ϑ 15,8°, J 30.
beob.: 12,14 10,32 8,89 7,69 6,69 5,83 5,08 4,46 3,90 3,47 3,10
ber.: 12,18 10,33 8,86 7,66 6,66 5,82 5,10 4,48 3,94 3,48 3,07
m. A.: 0,55 · 10^{-2} A_1 1,1 · 10^{-5} A 4,06 · 10^{-3} l 3,99 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,78** · 10^{-2}.

2b) m. R.

L 7,65, B 0,488, D 0,1613, T 0,386, s 82,1 · 10^{-10}, ϑ 23,6°, J 40.
beob.: 8,66, 6,67, 5,22, 4,12, 3,29, 2,65, 2,14.
ber.: 8,68, 6,65, 5,21, 4,13, 3,31, 2,65, 2,14.
m. A.: 0,35 · 10^{-2} A_1 2,3 · 10^{-5} A 5,30 · 10^{-3} l 5,24 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,01** · 10^{-2}.

2c) o. R.

L 7,48, B 0,488, D 0,1613, T 0,314, s 80,8 · 10^{-10}, ϑ 17,3°, J 40.
beob.: 10,30, 7,72, 5,93, 4,60, 3,60, 2,83.
ber.: 10,30, 7,72, 5,92, 4,60, 3,60, 2,83.
m. A.: 0,13 · 10^{-2} A_1 1,6 · 10^{-5} A 5,87 · 10^{-3} l 5,82 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,35** · 10^{-2}.

3a) m. R.

L 9,70, B 0,486, D 0,1596, T 0,438, s 80,6 · 10^{-10}, ϑ 19,0°, J 40.
beob.: 10,92, 8,75, 7,10, 5,79, 4,76, 3,91, 3,23.
ber.: 10,92, 8,75, 7,09, 5,80, 4,76, 3,92, 3,23.
m. A.: 0,07 · 10^{-2}, A_1 0,9 · 10^{-5} A 4,69 · 10^{-3} l 4,63 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,49** · 10^{-2}.

3b) m. R.

L 8,65, B 0,486, D 0,1596, T 0,412, s 80,0 · 10^{-10}, ϑ 19,4°, J 20.
beob.: 10,65, 9,32, 8,21, 7,24, 6,42, 5,80, 5,18.
ber.: 10,66, 9,30, 8,18, 7,25, 6,46, 5,77, 5,18.
m. A.: 0,34 · 10^{-2} A_1 2,0 · 10^{-5} A 4,86 · 10^{-3} l 4,79 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,14** · 10^{-2}.

3c) m. R.

L 6,60, B 0,486, D 0,1596, T 0,361, s 80,4 · 10^{-10}, ϑ 23,4°, J 40.
beob.: 8,53, 6,33, 4,78, 3,61, 2,83, 2,20.
ber.: 8,55, 6,30, 4,76, 3,65, 2,82, 2,19.
m. A.: 0,65 · 10^{-2} A_1 2,7 · 10^{-5} A 6,17 · 10^{-3} l 6,11 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,03** · 10^{-2}.

4a) o. R.

L 9,80, B 0,487, D 0,1616, T 0,361, s 81,8 · 10^{-10}, ϑ 18,8°, J 50.
beob.: 11,25, 8,54, 6,58, 5,15, 4,10, 3,30, 2,59.
ber.: 11,26, 8,51, 6,59, 5,18, 4,10, 3,26, 2,61.
m. A.: 0,62 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 4,40 · 10^{-3} l 4,34 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,25** · 10^{-2}.

4b) m. R.

L 10,00, B 0,487, D 0,1616, T 0,437, s 82,0 · 10^{-10}, ϑ 23,3°, J 40.
beob.: 9,00, 7,33, 5,98, 4,94, 4,13, 3,42, 2,88, 2,44.
ber.: 9,03, 7,29, 5,98, 4,95, 4,12, 3,44, 2,89, 2,43.
m. A.: 0,44 · 10^{-2} A_1 1,7 · 10^{-5} A 4,23 · 10^{-3} l 4,17 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,17** · 10^{-2}.

5) o. R.

L 9,50, B 0,487, D 0,1602, T 0,355, s 79,7 · 10^{-10}, ϑ 16,4°, J 50.
beob.: 10,59, 8,23, 6,54, 5,21, 4,23, 3,47.
ber.: 10,60, 8,21, 6,51, 5,24, 4,24, 3,46.
m. A.: 0,42 · 10^{-2} A_1 1,4 · 10^{-5} A 3,90 · 10^{-3} l 3,85 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **3,66** · 10^{-2}.

Selbst wenn man 2a und 5 ausschaltet, bleibt noch eine Unsicherheit von 11% zurück. Da aber diese beiden stark abweichenden Werte zu klein sind, ist es unmöglich, sie aus Beobachtungsfehlern zu erklären. Im Gegenteil haben die kleineren Werte stets die größere Wahrscheinlichkeit für sich,

dem wahren Werte nahe zu kommen. Das arithmetische Mittel aus den verschiedenen Werten ergibt für

$$l \cdot L = \mathbf{4{,}14} \cdot 10^{-2}$$
$$s = \mathbf{81{,}1} \cdot 10^{-10}.$$

Dabei betragen die mittleren Beobachtungsfehler $0{,}28 \cdot 10^{-2}$ bzw. $0{,}9 \cdot 10^{-10}$.

Die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Amplituden ist auch hier wie bei allen folgenden Orientierungen befriedigend, wenngleich sie keineswegs überall so gut ist wie bei 2c und 3a.

III. Die Längsrichtung fällt in die Granatoedernormale, die Breite in die Würfelnormale.

1 war durch mehrfaches Zerbrechen bis auf 5 cm. verkürzt und daher für die weitere Benutzung unbrauchbar. 2 konnte nicht auf Drillung untersucht werden, weil der Stab verbogen war.

3a) o. R.
L 10,65, B 0,559, D 0,1603, T 0,340, s 77,4 · 10^{-10}, ϑ 19,0°, J 50.
beob.: 11,12, 8,46, 6,56, 5,16, 4,17, 3,36, 2,72.
ber.: 11,15, 8,41, 6,56, 5,20, 4,16, 3,35, 2,71.
m. A: $0{,}41 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ A $4{,}09 \cdot 10^{-3}$ l $4{,}04 \cdot 10^{-3}$
$l \cdot L$ **4,30** · 10^{-2}.

3b) m. R.
L 10,55, B 0,559, D 0,1603, T 0,406, s 76,6 · 10^{-10}, ϑ 19,2°, J 50.
beob.: 9,80, 7,25, 5,50, 4,27, 3,34, 2,65, 2,17.
ber.: 9,85, 7,18, 5,48, 4,27, 3,37, 2,68, 2,14.
m. A.: $2{,}22 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ A $4{,}34 \cdot 10^{-3}$ l $4{,}27 \cdot 10^{-3}$
$l \cdot L$ **4,51** · 10^{-2}.

3c) m. R.
L 9,45, B 0,559, D 0,1603, T 0,384, s 76,5 · 10^{-10}, ϑ 30,0°, J 40.
beob.: 8,84, 6,62, 5,10, 4,04, 3,20, 2,59, 2,14.
ber.: 8,87, 6,60, 5,12, 4,06, 3,26, 2,64, 2,15.
m. A.: $1{,}13 \cdot 10^{-2}$ A_1 $4{,}1 \cdot 10^{-5}$ A $4{,}99 \cdot 10^{-3}$ l $4{,}93 \cdot 10^{-3}$
$l \cdot L$ **4,66** · 10^{-2}.

Wenngleich die beobachteten und berechneten Amplituden in dieser letzten Reihe gar nicht gut stimmen, zeigen die Zahlen doch, daß mit der Steigerung der Temperatur auf 30° nicht notwendig eine beträchtliche Steigerung der Dämpfung verbunden sein muß. bestätigen also das, was ich früher angegeben habe.

4a) m. R.

L 10,62, B 0,558, D 0,1602, T 0,406, s 75,8 · 10^{-10}, ϑ 19,0°, J 50.

beob.: 9,55, 7,53, 5,99, 4,83, 3,90, 3,21.

ber.: 9,57, 7,50, 5,98, 4,83, 3,92, 3,20.

m. A.: 0,38 · 10^{-2} A_1 1,3 · 10^{-5} A 3,91 · 10^{-3} l 3,85 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **4,19** · 10^{-2}.

4b) m. R.

L 10,50, B 0,558, D 0,1602, T 0,407, s 77,1 · 10^{-10}, ϑ 18,8°, J 50.

beob.: 10,55, 8,10, 6,34, 5,04, 4,03, 3,22.

ber.: 10,55, 8,10, 6,35, 5,04, 4,02, 3,22.

m. A.: 0,14 · 10^{-2} A_1 1,2 · 10^{-5} A 4,27 · 10^{-3} l 4,20 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **4,41** · 10^{-2}.

4c) m. R.

L 10,50, B 0,558, D 0,1602, T 0,410, s 78,2 · 10^{-10}, ϑ 29,8°, J 40.

beob.: 8,41, 6,70, 5,39, 4,41, 3,60, 2,98, 2,48, 2,10.

ber.: 8,46, 6,67, 5,38, 4,39, 3,62, 3,00, 2,50, 2,08.

m. A.: 0,67 · 10^{-2} A_1 2,7 · 10^{-5} A 4,40 · 10^{-3} l 4,33 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **4,55** · 10^{-2}.

Auch hier gilt das gleiche wie bei dem Stabe 3. Die geringe Übereinstimmung der Resultate bei dieser Orientierung ließ eine weitere Nachprüfung als wünschenswert erscheinen. Die hierbei erhaltenen brauchbaren Werte 4*d* und 4*e* liegen beträchtlich unter den sonst gefundenen; sie haben freilich gerade dadurch die größere Wahrscheinlichkeit für sich.

4d) m. R.

L 10,55, B 0,558, D 0,1602, T 0,419, s 80,9 · 10^{-10}, ϑ 16,6°, J 40.

beob.: 12,96, 10,90, 9,25, 7,90, 6,73, 5,79, 5,05, 4,35, 3,81.

ber.: 13,00, 10,88, 9,22, 7,87, 6,76, 5,83, 5,04, 4,37, 3,79.

m. A.: 0,18 · 10^{-2} A_1 0,7 · 10^{-6} A 3,42 · 10^{-3} l 3,36 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **3,61** · 10^{-2}.

4e) m. R.

L 10,60, B 0,558, D 0,1602, T ?, s ?, ϑ 14,9°, J40.

beob.: 12,26, 9,99, 8,36, 7,04, 5,92, 5,00, 4,28, 3,68.

ber.: 12,25, 10,03 8,34, 7,00, 5,92, 5,01, 4,29, 3,67.

m. A.: $0{,}14 \cdot 10^{-2}$ A_1 $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ A $3{,}78 \cdot 10^{-3}$ l $3{,}71 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **3,93** $\cdot 10^{-2}$.

5) m. R.

L6,22, B0,586, D0,1644, T0,301, s80,8 $\cdot 10^{-10}$, ϑ18,8°, J20.

beob.: 8,75, 7,20, 5,94, 4,96, 4,22, 3,59, 3,09.

ber.: 8,78, 7,14, 5,93, 4,99, 4,22, 3,60, 3,08.

m. A.: $0{,}47 \cdot 10^{-2}$ A_1 $4{,}8 \cdot 10^{-5}$ A $7{,}24 \cdot 10^{-3}$ l $7{,}19 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot$ **4,48** $\cdot 10^{-2}$.

Die Mittelwerte sind

$$l \cdot L = \mathbf{4{,}25} \cdot 10^{-2},$$
$$s = \mathbf{77{,}7} \cdot 10^{-2},$$

die mittleren Beobachtungsfehler $0{,}33 \cdot 10^{-2}$ und $1{,}8 \cdot 10^{-10}$.

IV. Die Längsrichtung liegt in der Granatoederebene unter 27° gegen die Achse, die Breite in der Granatoedernormalen.

Die gefundenen Werte stimmen nicht gut überein. 1 und 3 liefern viel kleinere Werte als die übrigen Stäbe. Die Wiederholung der Versuche ergab bei 1 einen etwas unsichern Wert, der im Bereich der sonst gefundenen liegt, bei 3 wieder einen ziemlich kleinen.

1a) m. R.

L8,53, B0,604, D0,1598, T0,345, s74,5 $\cdot 10^{-10}$, ϑ22,1°, J40.

beob.: 9,01, 6,93, 5,52, 4,39, 3,59, 2,95, 2,41.

ber.: 9,01, 6,93, 5,49, 4,42, 3,59, 2,94, 2,41.

m. A.: $0{,}36 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}3 \cdot 10^{-5}$ A $4{,}72 \cdot 10^{-3}$ l $4{,}66 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **3,98** $\cdot 10^{-2}$.

1b) m. R.

L9,00, B0,604, D0,1598, T0,355, s74,7 $\cdot 10^{-10}$, ϑ23,8°, J30.

beob.: 8,67, 6,72, 5,35, 4,21, 3,42, 2,76, 2,25.

ber.: 8,67, 6,71, 5,30, 4,24, 3,42, 2,77, 2,24.

m. A.: $0{,}24 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}3 \cdot 10^{-5}$ A $5{,}07 \cdot 10^{-3}$ l $5{,}01 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **4,51** $\cdot 10^{-2}$.

2a) o. R.

L 7,90, B 0,604, D 0,1587, T 0,280, s 75,6 · 10^{-10}, ϑ 18,4°, J 30.
beob.: 9,34, 7,49, 6,11, 5,01, 4,13, 3,43, 2,88, 2,44.
ber.: 9,36, 7,47, 6,07, 4,99, 4,14, 3,44, 2,88, 2,41.
m. A.: 0,54 · 10^{-2} A_1 2,6 · 10^{-5} A 5,73 · 10^{-3} l 5,68 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,49** · 10^{-2}.

2b) m. R.

L 8,15, B 0,604, D 0,1587, T 0,344, s 76,1 · 10^{-10}, ϑ 24,3°, J 30.
beob.: 8,92, 7,13, 5,60, 4,58, 3,78, 3,14, 2,68.
ber.: 9,00, 7,00, 5,61, 4,59, 3,80, 3,17, 2,65.
m. A.: 0,73 · 10^{-2} A_1 4,4 · 10^{-5} A 5,55 · 10^{-3} l 5,50 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,48** · 10^{-2}.

3a) m. R.

L 8,04, B 0,604, D 0,1595, T 0,335, s 74,1 · 10^{-10}, ϑ 20,2°, J 30.
beob.: 8,59, 6,93, 5,68, 4,69, 3,91, 3,34, 2,85.
ber.: 8,62, 6,90, 5,65, 4,70, 3,95, 3,34, 2,84.
m. A.: 0,55 · 10^{-2} A_1 1,7 · 10^{-5} A 5,07 · 10^{-3} l 5,02 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,03** · 10^{-2}.

3b) m. R.

L 8,36, B 0,604, D 0,1595, T ?, s ?, ϑ 27,6°, J 40.
beob.: 8,96 (6,77), 5,17, 4,05, 3,19, 2,62, 2,15.
ber.: 9,03, 6,67, 5,14, 4,06, 3,25, 2,62, 2,17.
m. A.: 1,17 · 10^{-2} A_1 4,1 · 10^{-5} A 5,03 · 10^{-3} l 4,98 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,16** · 10^{-2}.

Diese Beobachtung erscheint auch wegen der hohen mittleren Abweichung zwischen beobachteten und berechneten Amplituden ziemlich unsicher. Sie wird wegen des großen ϑ nur mit halbem Gewichte gezählt werden.

4) o. R.

L 8,15, B 0,605, D 0,1573, T 0,282, s 72,7 · 10^{-10}, ϑ 19,4°, J 40.
beob.: 10,45, 7,82, 5,95, 4,65, 3,65, 2,89, 2,34.
ber.: 10,48, 7,80, 5,95, 4,64, 3,66, 2,91, 2,32.
m. A.: 0,51 · 10^{-2} A_1 2,4 · 10^{-5} A 5,51 · 10^{-3} l 5,46 · 10^{-3}
$l \cdot L$ **4,45** · 10^{-2}.

5) o. R.

L 7,50, B 0,604, D 0,1618, T 0,263, s 74,2 · 10^{-10}, ϑ 19,8°, J 30.

beob.: 7,43, 5,84, 4,66, 3,78, 3,07, 2,53, 2,10.

ber.: 7,44, 5,82, 4,65, 3,77, 3,08, 2,53, 2,09.

m. A.: 0,34 · 10^{-2} A_1 4,6 · 10^{-5} A 6,19 · 10^{-3} l 6,15 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **4,62** · 10^{-2}.

Die Mittelwerte sind

$$l \cdot L = \mathbf{4{,}35} \cdot 10^{-2} \text{ und}$$
$$s = \mathbf{74{,}6} \cdot 10^{-10},$$

die zugehörigen mittleren Beobachtungsfehler 0,24 · 10^{-2} und 1,1 · 10^{-10}.

V. Die Längsrichtung liegt in der Oktaedernormalen, die Breite in der Granatoedernormalen.

Diese Orientierung bereitete der Untersuchung recht beträchtliche Schwierigkeiten. Auch bei vorsichtigster Behandlung der Stäbe zeigten sich nach der Beobachtung namentlich an den Enden Risse in Richtung der Spaltebenen. Treten solche Risse schon während der Beobachtung ein, so muß dadurch natürlich das Resultat beträchtlich beeinflußt werden. Ich glaube, daß eine ganze Zahl von Beobachtungsreihen, die offenbar zu große Werte von A zeigen, dadurch verdorben sind. Recht oft störten auch gerade bei dieser Sorte Pendelschwingungen des Stabes, viel häufiger als bei den vorher aufgeführten Sorten. Das hängt wahrscheinlich mit dem verschiedenen Verhalten der Stäbe bei Biegungs- und Drillungsschwingungen zusammen. Bei den Sorten I bis IV war die Dämpfung der Biegungsschwingungen viel stärker als die der Drillungsschwingungen. Wurden durch kleine Ungenauigkeiten bei der Anfangseinstellung Biegungsschwingungen erzeugt, so wurden diese viel schneller gedämpft als die Drillungsschwingungen, und nach kurzer Zeit erschien eine nahezu reine Drillungsschwingung, die ohne Bedenken der Messung unterworfen werden konnte. Bei V dagegen ist die Dämpfung der Drillungsschwingungen nur wenig kleiner als die der Biegungsschwin-

gungen. Selbst kleine Ungenauigkeiten bleiben ziemlich während der ganzen Zeit des Versuches wirksam und erschweren die Ausmessung erheblich.

Die große Unsicherheit der Resultate veranlaßte eine genaue Nachprüfung der Versuche bei mittlerer Temperatur. Leider ließen die großen Schwierigkeiten, die sich gerade bei dieser Sorte zeigen, nur drei brauchbare Reihen entstehen (3c, 6b, 6c), und gerade diese vergrößern die Unsicherheit des Mittelwertes, indem zwei von ihnen beträchtlich unter dem Durchschnitt aller übrigen Werte liegen. Bei dieser Orientierung ist also kaum mehr als die Größenordnung der Dämpfung bei Drillungsschwingungen sichergestellt. Trotz dieser Unsicherheit scheint die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Amplituden im allgemeinen noch ganz befriedigend.

Auffällig ist die große Differenz der gefundenen Elastizitätsmoduln, trotzdem hier sicher die verkürzte Formel 84 (S. 48) gilt und die Seitenflächen verhältnismäßig gut eben und parallel waren. Von den Stäben gehören 4 bis 8 zur zweiten Lieferung, nur 3 zum älteren Material.

3a) o. R.

L 7,48, B 0,644, D 0,1548, T 0,253, s $65{,}6 \cdot 10^{-10}$, ϑ 22,9°, J 20

beob.: 8,14, 6,01, 4,55, 3,51, 2,77, 2,20.

ber.: 8,16, 5,97, 4,55, 3,53, 2,78, 2,20.

m. A.: $0{,}45 \cdot 10^{-2}$ A_1 $8.8 \cdot 10^{-5}$ A $11{,}19 \cdot 10^{-3}$ l $11{,}15 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **8,34** $\cdot 10^{-2}$.

3b) m. R.

L 7,42, B 0,644, D 0,1548, T 0,296, s $62{,}2 \cdot 10^{-10}$, ϑ 30,2°, J 20.

beob.: 8,21, 6,38, 5,05, 4,04, 3,25, 2,65, 2,20.

ber.: 8,23, 6,36, 5,03, 4,04, 3,27, 2,67, 2,18.

m. A.: $0{,}77 \cdot 10^{-2}$ A_1 $6{,}1 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}68 \cdot 10^{-3}$ l $9{,}64 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **7,15** $\cdot 10^{-2}$.

3c) m. R.

L 7,75, B 0,644, D 0,1548, T 0,317, s $68{,}3 \cdot 10^{-10}$, ϑ 18,0°, J 20.

beob.: 12,55, 10,30, 8,50, 7,18, 6,01, 5,07, 4,34, 3,74, 3,19.

ber.: 12,60, 10,26, 8,51, 7,13, 6,02, 5,11, 4,36, 3,72, 3,18.

m. A.: $0{,}19 \cdot 10^{-2}$ A_1 $2{,}1 \cdot 10^{-5}$ A $7{,}54 \cdot 10^{-3}$ l $7{,}49 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **5,81** $\cdot 10^{-2}$.

4a) o. R.

L 8,63, B 0,498, D 0,1528, T 0,322, s $65{,}1 \cdot 10^{-10}$, ϑ 21,2°, J 20.

beob.: 7,04, 5,44, 4,27, 3,43, 2,77, 2,30.

ber.: 7,06, 5,41, 4,27, 3,44, 2,79, 2,28.

m. A.: $0{,}51 \cdot 10^{-2}$ A_1 $10{,}0 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}43 \cdot 10^{-3}$ l $9{,}38 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **8,09** $\cdot 10^{-2}$.

4b) m. R.

L 8,63, B 0,498, D 0,1528, T 0,387, s $64{,}7 \cdot 10^{-10}$, ϑ 21.2°, J 20.

beob.: 6,86, 5,25, 4,09, 3,24, 2,59, 2,15.

ber.: 6,89, 5,21, 4,08, 3,25, 2,63, 2,13.

m. A.: $0{,}85 \cdot 10^{-2}$ A_1 $11{,}4 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}77 \cdot 10^{-3}$ l $9{,}71 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **8,38** $\cdot 10^{-2}$.

4c) m. R.

L 8,30, B 0,498, D 0,1528, T 0,378, s $64{,}1 \cdot 10^{-10}$, ϑ 23,9°, J 20.

beob.: 9,59, 7,52, 6,05, 4,90, 4,02, 3,33, 2,79.

ber.: 9,61, 7,50, 6,02, 4,91, 4,04, 3,34, 2,78.

m. A.: $0{,}36 \cdot 10^{-2}$ A_1 $4{,}9 \cdot 10^{-5}$ A $8{,}75 \cdot 10^{-3}$ l $8{,}69 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **7,22** $\cdot 10^{-2}$.

5) o. R.

L 8,55, B 0,495, D 0.1519, T 0,322, s $64{,}2 \cdot 10^{-10}$, ϑ 22,7°, J 20.

beob.: 6,50, 4,95, 3,87, 3,06, 2,46, 2,02.

ber.: 6,52, 4,93, 3,86, 3,07, 2,48, 2,01.

m. A.: $0{,}53 \cdot 10^{-2}$ A_1 $12{,}8 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}80 \cdot 10^{-3}$ l $9{,}75 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **8,34** $\cdot 10^{-2}$.

6a) m. R.

L 7,50, B 0,492, D 0,1511, T 0,372, s $67{,}2 \cdot 10^{-10}$, ϑ 29,6°, J 20.

beob.: 7,51, 5,70, 4,45, 3,57, 2,90, 2,38.

ber.: 7,52, 5,67, 4,46, 3,58, 2,90, 2,37.

m. A.: $0{,}24 \cdot 10^{-2}$ A_1 $10{,}9 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}29 \cdot 10^{-3}$ l $9{,}23 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **6,92** $\cdot 10^{-2}$.

6b) m. R.

L 7,25, B 0,492, D 0,1511, T ? s ? ϑ 18°, J 10.

beob.: 6,49, 5,60, 4,93, 4,38, 3,90, 3,52, 3,15, 2,83.

ber.: 6,47, 5,62, 4,94, 4,37, 3,91, 3,50, 3,15, 2,84.

m. A.: $0{,}14 \cdot 10^{-2}$ A_1 $7{,}0 \cdot 10^{-5}$ A $9{,}04 \cdot 10^{-3}$ l $8{,}99 \cdot 10^{-3}$

$l \cdot L$ **6,52** $\cdot 10^{-2}$.

6c) o. R.

L 7,25, B 0,492, D 0,1511, T 0,304, s 66,0·10 $^{-10}$, ϑ 17,4°, J 10.
beob.: 6,59, 5,65, 4,91, 4,23, 3,74, 3,29, 2,91, 2,60.
ber.: 6,61, 5,64, 4,88, 4,25, 3,74, 3,30, 2,92, 2,59.
m. A.: $0{,}18\cdot10^{-2}$ A_1 $13{,}2\cdot10^{-5}$ A $10{,}88\cdot10^{-3}$ l $10{,}84\cdot10^{-3}$
$l\cdot L$ $\mathbf{7{,}86}\cdot10^{-2}$.

7) m. R.

L 6,25, B 0,480, D 0,1505, T 0,351, s $67{,}3\cdot10^{-10}$, ϑ 27,9°, J 10.
beob.: 8,07, 6,70, 5,63, 4,75, 4,06, 3,52, 3,04, 2,65, 2,31.
ber.: 8,11, 6,67, 5,60, 4,76, 4,08, 3,52, 3,05, 2,65, 2,31,
m. A.: $0{,}40\cdot10^{-2}$ A_1 $11{,}6\cdot10^{-5}$ A $13{,}12\cdot10^{-3}$ l $13{,}06\cdot10^{-3}$
$l\cdot L$ $\mathbf{8{,}16}\cdot10^{-2}$.

8) m. R.

L 7,55, B 0,480, D 0,1511, T 0,380, s $66{,}1\cdot10^{-10}$, ϑ 28,3°, J 20.
beob.: 8,21, 6,17, 4,75, 3,74, 2,97, 2,40.
ber.: 8,23, 6,14, 4,75, 3,74, 2,98, 2,39.
m. A.: $0{,}45\cdot10^{-2}$ A_1 $7{,}9\cdot10^{-5}$ A $10{,}48\cdot10^{-3}$ l $10{,}42\cdot10^{-3}$
$l\cdot L$ $\mathbf{7{,}87}\cdot10^{-2}$.

Die Mittelwerte sind:

$$l\cdot L = \mathbf{7{,}56}\cdot10^{-2}$$
$$s = \mathbf{65{,}5}\cdot10^{-10}$$

die mittleren Beobachtungsfehler $0{,}86\cdot10^{-2}$ und $1{,}6\cdot10^{-10}$.

VI. Die Längsrichtung und die Breite liegen in der Granatoedernormalen.

Für VI gilt das, was einleitend über V gesagt wurde, in noch höherem Maße: daher die geringe Zahl brauchbarer Messungen. Trotzdem scheint mir der unerwartet hohe Wert für $l\cdot L$ ziemlich sichergestellt zu sein, 1 und 3 gehören zum älteren Material. Bei der zweiten Lieferung befanden sich zwei Stäbe, von denen 4 untersucht, 5 vorher zerbrochen ist.

1a) m. R.

L 6,20, B 0,623, D 0,1578, T 0,262, s $59{,}2\cdot10^{-10}$, ϑ 30,2°, J 10.
beob.: 8,02, 5,87, 4,47, 3,43, 2,65, 2,07.
ber.: 8,01, 5,89, 4,46, 3,43, 2,66, 2,07.
m. A.: $0{,}24\cdot10^{-2}$ A_1 $13{,}7\cdot10^{-5}$ A $24{,}16\cdot10^{-3}$ l $24{,}12\cdot10^{-3}$
$l\cdot L$ $\mathbf{14{,}95}\cdot10^{-2}$.

1b) m. R.

L 6,00, B 0,623, D 0,1578, T 0,261, s 60,7 · 10^{-10}, ϑ 29,6°, J 10.

beob.: 7,21, 5,25, 3,90, 2,94, 2,23.

ber.: 7,21, 5,25, 3,90, 2,94, 2,23.

m. A.: 0,08 · 10^{-2} A_1 12,4 · 10^{-5} A 26,95 · 10^{-3} l 26,91 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **16,15** · 10^{-2}.

3) m. R.

L 9,87, B 0,622, D 0,1591, T 0,330, s 60,3 · 10^{-10}, ϑ 18,3°, J 10.

beob.: 8,10, 6,72, 5,61, 4,72, 3,99, 3,40, 2,91, 2,51, 2,20.

ber.: 8,15, 6,68, 5,57, 4,70, 3,99, 3,42, 2,93, 2,52, 2,17.

m. A.: 0,71 · 10^{-2} A_1 10,1 · 10^{-5} A 14,32 · 10^{-3} l 14,28 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **14,09** · 10^{-2}.

4a) m. R.

L 8,55, B 0,504, D 0,1511, T 0,376, s 60,6 · 10^{-10}, ϑ 21,9°, J 10.

beob.: 7,68, 6,22, 5,04, 4,14, 3,46, 2,89, 2,45.

ber.: 7,71, 6,17, 5,03, 4,16, 3,47, 2,90, 2,44.

m. A.: 0,47 · 10^{-2} A_1 12,1 · 10^{-5} A 16,51 · 10^{-3} l 16,45 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **14,06** · 10^{-2}.

4b) o. R.

L 8,55, B 0,504, D 0,1511, T 0,313, s 61,1 · 10^{-10}, ϑ 22,0°, J 10.

beob.: 7,36, 5,87, 4,71, 3,87, 3,19, 2,64, 2,21.

ber.: 7,38, 5,84, 4,72, 3,87, 3,19, 2,65, 2,21.

m. A.: 0,32 · 10^{-2} A_1 13,5 · 10^{-5} A 17,48 · 10^{-3} l 17,43 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **14,91** · 10^{-2}.

4c) o. R.

L 8,35, B 0,504, D 0,1511, T 0,310, s 61,4 · 10^{-10}, ϑ 22,8°, J 10.

beob.: 8,73, 6,88, 5,46, 4,42, 3,61, 3,00, 2,54, 2,11.

ber.: 8.79, 6,80, 5,43, 4,43, 3,64, 3,02, 2,52, 2,11.

m. A.: 0,84 · 10^{-2} A_1 14,0 · 10^{-5} A 17,14 · 10^{-3} l 17,09 · 10^{-3}

$l \cdot L$ **14,27** · 10^{-2}.

Die Mittelwerte sind:

$$l \cdot L = \mathbf{14{,}58} \cdot 10^{-2}$$

$$s = \mathbf{60{,}6} \cdot 10^{-10}$$

die mittleren Beobachtungsfehler 0,67 · 10^{-2} und 1,0 · 10^{-10}.

Allgemein ist zu diesen Resultaten zu bemerken, daß wider alles Erwarten die Drillungsbeobachtungen viel weniger unter

sich übereinstimmende Werte geliefert haben als die Biegungsbeobachtungen, während die äußeren Fehlerquellen, die im Apparat selbst begründet liegen, beim Biegungsapparat entschieden größer sind als beim Drillungsapparat. Zudem sind die Drillungsbeobachtungen zum größten Teil nach den Biegungsbeobachtungen angestellt, so daß gerade ihnen Technik und Übung zustatten kamen. Einen ausreichenden Grund für die geringe Übereinstimmung vermag ich nicht anzugeben.

Der Drillungsmodul s'_{55} hängt für das reguläre System mit den Hauptmoduln s_{11}, s_{12} und s_{44} durch die Formel[1]) zusammen:

$$(64)\quad s'_{55} = s_{44} + 4((s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}s_{44})(\alpha_1^2\gamma_1^2 + \alpha_2^2\gamma_2^2 + \alpha_3^2\gamma_3^2)$$

Dabei sind wieder γ_1, γ_2, γ_3 die Richtungskosinus der Längsrichtung gegen die Achsen, α_1, α_2, α_3 die der Breite. Angewendet habe ich diese Formel auf die Resultate für I, III, V und VI. II und IV sind nur zum Vergleich mitgeteilt (vgl. S. 49).

	I	III	V	VI	II	IV
beob.:	80,1	77,7	65,5	60,6	81,1	74,6
ber.:	78,8	78,8	66,3	60,1	(78,8)	(74,9)
Diff.:	1,3	1,1	0,8	0,5	(2,3)	(0,3)
m. Bf.:	1.0	1,8	1,6	1,0	0,9	1,1

Die Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werten sind also etwa von der Größe der mittleren Beobachtungsfehler.

Aus den statischen Beobachtungen berechnen sich die Zahlen wie folgt:

I, II, III	IV	V	VI
77,29	73,31	64,42	57,96

also wiederum kleiner als aus den dynamischen Beobachtungen. Weiter findet sich:

$$s_{44} = \mathbf{78{,}8 \cdot 10^{-10}},\ 2\,((s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}s_{44}) = \mathbf{-18{,}7 \cdot 10^{-10}}.$$

Aus diesen und den früher gefundenen Werten findet man dann für die Hauptmoduln:

$$\mathbf{s_{11} = 24{,}4 \cdot 10^{-10},\quad s_{12} = -5{,}6 \cdot 10^{-10},\quad s_{44} = 78{,}8 \cdot 10^{-10}}$$

[1]) Kristallphysik S. 739.

Die statisch bestimmten Zahlen sind:

$$s_{11} = 23{,}82 \cdot 10^{-10}, \quad s_{12} = -5{,}17 \cdot 10^{-10}, \quad s_{44} = 77{,}29 \cdot 10^{-10}.$$

Sehr auffällig und sonderbar ist es, daß die Dämpfung der Drillungsschwingungen nach den vorliegenden Beobachtungen einem ganz andern Gesetz folgt als die der Biegungsbeobachtungen. Ich habe mich vergeblich bemüht, die Resultate dadurch zu vereinigen, daß ich annahm, das logarithmische Dekrement setze sich in beiden Fällen aus zwei Teilen zusammen, einem, der nur von der Orientierung des Stabes, einem andern, der von der Orientierung und von der Länge des Stabes abhängt. Daß bei der Drillung nicht l, sondern $l \cdot L$ als Konstante für die einzelne Orientierung erscheint, weist auf eine Ursache hin, die ganz von innerer Reibung verschieden ist. Vielleicht kommen hier irgendwelche scherenden Kräfte in Betracht.

Der Wert $l \cdot L$ ist sehr stark abhängig von der Orientierung der Stabachsen, und zwar sowohl von der der Längs- wie der Breitachse. Das zeigt die überaus große Verschiedenheit dieser Zahl bei den Sorten III und VI. Es ist mir nicht gelungen, eine einfache Formel für die Abhängigkeit des Wertes von der Symmetrie des Kristalls zu finden. Beschränkt man sich auf Glieder vierten Grades in dem Richtungskosinus, die für die Darstellung von s'_{33}, s'_{55} und $l' \cdot s'_{33}$ ausreichen, so kommt man weder zu einer befriedigenden Wiedergabe von $l' \cdot L$ noch von $l' \cdot L \cdot s'_{55}$. So muß ich auch die Frage offen lassen, wie die Dämpfung der Drillungsschwingungen von der Orientierung der Stabachsen abhängt. Qualitativ erhält man eine Vorstellung von dem Verlauf, wenn man annimmt, daß die Dämpfung durch gleitende Reibung in den Spaltflächen bedingt ist, die um so größer wird, je mehr die Spaltfläche gegen die Ebene, in der die Drillung erfolgt, geneigt ist.

Zusammenfassung.

1. Freie Biegungs- und Drillungsschwingungen prismatischer Steinsalzstäbe verlaufen nach dem Gesetz

$$e^{-\lambda \frac{T}{t}} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t'),$$

worin

$$\lambda = A + A_1 A^2.$$

A bezeichnet darin die jeweilige Schwingungsamplitude. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Formel beschränkt sich auf kleine Amplituden.

2. Der Wert von A_1 läßt keine Gesetzmäßigkeit erkennen. Er ist im allgemeinen groß bei großem A.

3. Der von Luftwiderstand und Achsenreibung freie Teil l von A $\left(l = A - \frac{A_0 T}{T_0}\right)$ ist bei den Biegungsschwingungen für die einzelne Orientierung eine Konstante. Die Beziehung zur Symmetrie des Kristalles ist einigermaßen richtig gegeben durch die Formel

$$l' \cdot s'_{33} = A + B(\gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2),$$

die sich aus der Annahme eines Reibungsgesetzes ergibt, welches eine Verallgemeinerung der Grundformeln der Flüssigkeitsreibung darstellt.

4. Für das hauptsächlich untersuchte Material und eine Temperatur von 18—20° fand sich

$$A = 79{,}5 \cdot 10^{-12}, B = -74{,}1 \cdot 10^{-12}.$$

5. Bei der Drillung scheint nicht l selbst, sondern $l \cdot L$ für die einzelne Orientierung eine Konstante zu sein. Es war nicht möglich, die beobachteten Zahlen für $l' \cdot L \cdot s'_{55}$ der oben erwähnten Theorie unterzuordnen.

6. Stäbe parallel der vierzähligen Hauptachse haben die größte Biegungs-, aber die kleinste Drillungsdämpfung.

7. Stäbe parallel der dreizähligen Hauptachse haben die kleinste Biegungsdämpfung, aber nicht die größte Drillungsdämpfung.

8. Das Maximum der beobachteten Drillungsdämpfung zeigen Stäbe mit der Längsrichtung und der Breite je in einer zweizähligen Hauptachse. Die Dämpfung ist hier etwa dreimal so groß wie bei Stäben mit der gleichen Längsrichtung, deren Breite in die vierzählige Hauptachse fällt ($l \cdot L = 14{,}58$ bzw. $4{,}25 \cdot 10^{-2}$).

9. Ebenso große Dämpfung der Biegungsschwingungen zeigen unter den Metallen nur Wismut ($l \cdot 10^4 =$) 160, Gußeisen 210 und Kadmium 252. Der Wert für Wismut entspricht etwa dem kleinsten beim Steinsalz beobachteten Werte, der Wert für Kadmium bleibt weit unter dem größten für Steinsalz beobachteten Werte 381. (Die Zahlen beziehen sich bei den Metallen auf Stäbe von etwa 10 cm Länge, 0,6 cm Breite und 0,1 cm Dicke).

10. Für die Drillungsschwingungen liegt der kleinste beobachtete Wert beim Steinsalz ($l \cdot 10^4 =$) 33 zwischen denen für Gußstahl 19 und Zink 58, der höchste von 146 entspricht etwa dem von Wismut 150. Dazwischen liegen Zinn 110 und Gußeisen 140. Größere Dämpfung zeigt nur Kadmium 308.

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geheimrat Voigt habe ich von ganzem Herzen zu danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für die oft recht mühevolle Sorgfalt, mit der er jederzeit ihren Fortgang förderte.

Herrn Professor Voller bin ich zu herzlichem Dank dafür verpflichtet, daß er mir für einige Nachprüfungen in liebenswürdigster Weise einen Arbeitsplatz im Physikalischen Staatsinstitut in Hamburg zur Verfügung stellte.

Lebenslauf.

Als Sohn des Zigarrenarbeiters Wilhelm Schmidt und seiner Frau Auguste, geb. Diesbrock, bin ich am 26. April 1882 zu Hamburg geboren und dort staatsangehörig. Von 1889 bis 1897 besuchte ich die öffentliche Volksschule, von 1897—1903 das Lehrerseminar in Hamburg. Nach bestandener Abgangsprüfung war ich fünf Jahre als Lehrer an hamburgischen Schulen tätig. Die Reifeprüfung bestand ich im Herbst 1907 als Fremder an der Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg. Von Ostern 1908 bis Herbst 1911 studierte ich in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften und besuchte dabei die Vorlesungen und Übungen der Herren Ambronn, Berthold, Born, Ehlers, Hilbert, Hoffmann, Husserl, Klein, Knoke, Koebe, Krüger, Landau, Minkowski, C. Müller, G. E. Müller Peter, Prandtl, Riecke, Runge, Voigt.

Druck von C. Schulze & Co. G. m. b. H., Gräfenhainichen.